Epanechnikov-Kern

www.stefan.englert.de.vu

Der **Epanechnikov-Kern**

$$k_E(x) = \frac{3}{4\sqrt{5}}\left(1 - \frac{x^2}{5}\right) \quad \text{falls} \quad |x| \leq \sqrt{5}\,, \qquad k_E(x) = 0 \quad \textit{sonst}$$

ist unter allen Kernen k, die den kompakten Träger $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$ besitzen und

$$k(x) \geq 0\,, \qquad \int k(x)\,dx = 1 \quad \text{und} \qquad \int x^2\,k(x)\,dx = 1 \tag{1}$$

erfüllen, derjenige, der

$$\int k^2(x)\,dx \tag{2}$$

minimiert.

Beweis: Wir rechnen zuerst nach, dass der Epanechnikov-Kern tatsächlich die Bedingungen (1) erfüllt. $k(x) \geq 0$ ist offensichtlich erfüllt. Des Weiteren gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} k_E(x)\,dx &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} k_E(x)\,dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{3}{4\sqrt{5}}\left(1 - \frac{x^2}{5}\right)\,dx \\
&= \left[\frac{3}{4\sqrt{5}}\left(x - \frac{x^3}{15}\right)\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = 1 \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,k_E(x)\,dx &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} x^2\,k_E(x)\,dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} x^2\left(\frac{3}{4\sqrt{5}}\left(1 - \frac{x^2}{5}\right)\right)\,dx \\
&= \left[\frac{3}{4\sqrt{5}}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{25}\right)\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = 1
\end{aligned}$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $k_E(x)$ das Integral (2) minimiert. Es sei im Folgenden k ein beliebiger Kern mit kompaktem Träger $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$, der die Bedingungen

(1) erfüllt. Dann gilt im Besonderen:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} (k(x) - k_E(x)) \cdot k_E(x)\ dx \\
&\quad = \frac{3}{4\sqrt{5}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (k(x) - k_E(x)) \left(1 - \frac{x^2}{5}\right) \\
&\quad = \frac{3}{4\sqrt{5}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (k(x) - k_E(x)) + \left(-\frac{1}{5}\right) \left(x^2\ (k(x) - k_E(x))\right)\ dx \right) \\
&\quad = \frac{3}{4\sqrt{5}} \left(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x)\ dx}_{=1} - \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_E(x)\ dx}_{=1} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\ k(x)\ dx}_{=1} - \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\ k_E(x)\ dx}_{=1} \right) \right) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber sofort:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} k^2(x)\ dx \quad &= \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(k(x) - k_E(x) + k_E(x)\right)^2\ dx \\
&= \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} (k(x) - k_E(x))^2 + 2\ (k(x) - k_E(x)) \cdot k_E(x) + (k_E(x))^2\ dx \\
&\overset{\text{siehe oben}}{=} \quad \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (k(x) - k_E(x))^2\ dx}_{\geq 0} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (k_E(x))^2\ dx \\
&\geq \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} (k_E(x))^2\ dx
\end{aligned}$$

Also minimiert der Epanechnikov Kern wirklich $\int k^2(x)\ dx$. $\square$