

Facharbeit

aus dem Fach

Physik

Thema:

**Präzisionsbestimmung der Fallbeschleunigung
mit ausführlicher Fehlerrechnung**

Verfasser: Stefan Englert
Leistungskurs: Physik
Kursleiterin: OStRin Maria Vollmuth

Inhaltsverzeichnis

1	Alles fällt zu Boden	3
2	Theoretische Fallbeschleunigungsbestimmung durch Normschwereformeln	4
2.1	Berechnung der Fallbeschleunigung	5
2.2	Beurteilung der Ergebnisse	6
3	Experimentelle Fallbeschleunigungsbestimmung mittels Präzisionspendel	7
3.1	Herleiten der zu Grunde liegende Formel	7
3.2	Auflösen der Formel nach Fallbeschleunigung g	8
3.3	Messprinzip	8
3.4	Versuchsvorbereitung	9
3.5	Versuchsdurchführung	10
3.5.1	Bestimmung der reduzierten Pendellänge l	10
3.5.2	Messen von Schwingungsdauer T und Auslenkung α	11
3.5.3	Zusammenfassung der Messergebnisse	13
3.6	Fehlerrechnung	14
3.6.1	Herleiten einer Formel für den Relativfehler von g	14
3.6.2	Mittlerer Fehler Δl_0 der Längenmessung	15
3.6.3	Mittlerer Fehler Δl der reduzierten Pendellänge	16
3.6.4	Bestimmung des mittleren Fehlers von T und α	17
3.6.5	Relativfehler von g	17
3.7	Angabe der ermittelten Fallbeschleunigungen mit Fehlerintervall	18
4	Abschlussbeurteilung und Ausblick	21
5	Literaturverzeichnis	23
6	Anlagen	24
6.1	Messreihen – Zusammenfassung eigener Ergebnisse	24
6.2	Messreihen – eigene Berechnungen	30
6.3	Regressionsgeraden – Berechnungen	36
6.4	Versuchsprotokolle	37
6.5	Sonstige Anlagen	38
	Danksagung	
	Erklärung und Bewertung	

1 Alles fällt zu Boden

„Alles fällt zu Boden“ – „mit konstanter Beschleunigung“ – „immer und überall gleich schnell“ – „mit $9,81 \text{ m/s}^2$ “ – „nichts hat darauf Einfluss“ – „das ändert sich nicht“

Von derartigen Schülerweisheiten musste ich mich erst loslösen, bevor ich mich mit meinem Facharbeitsthema „Präzisionsbestimmung der Fallbeschleunigung mit ausführlicher Fehlerrechnung“ ernsthaft beschäftigen konnte.

Viele dieser „Weisheiten“ besitzen zwar einen wahren Kern, sind aber für Berechnungen oder Versuche in der praktischen Physik meistens nicht exakt genug.

Besonders zur Eichung von Waagen oder bei der Festlegung des optimalen Startplatzes einer Weltraumrakete sind möglichst genaue Näherungswerte der Fall- oder Erdbeschleunigung¹⁾ ($\hat{=} g$) notwendig.

Bereits Anfang des 20. Jahrhunderts haben Physiker versucht eine allgemeine Formel zur Berechnung der Fallbeschleunigung aufzustellen.

Dabei wird die Tatsache ausgenutzt, dass die Fallbeschleunigung auf der Erde hauptsächlich von der Entfernung des Gegenstandes zum Erdmittelpunkt abhängt. Aus diesem Grund wird in den Formeln zur Berechnung der Fallbeschleunigung einerseits die Höhe des Gebietes über Normal-Null (NN) und, wegen der abgeflachten Kugelform der Erde, auch die geographische Breite des Gebietes berücksichtigt. Diese Daten werden nun mit Konstanten, die in zahlreichen Experimenten ermittelt wurden, in Beziehung gesetzt und sollen so eine allgemeingültige Formel zur Berechnung der Fallbeschleunigung ergeben.

Die frühesten Versionen einer Fallbeschleunigungs-Berechnungsformel stammen von Cassinis (1930)²⁾ und von Jeffreys (1948)²⁾.

Mit Hilfe dieser ist es möglich die Fallbeschleunigung g (in cm/s^2) in der Höhe h (in Metern) über Normal-Null auf einer Gesteinsplatte der Dichte ρ (in g/cm^3) bei der geographischen Breite φ (in Grad) zu berechnen. Die Fallbeschleunigungsformel lautet:

a) nach Cassinis (1930)²⁾

$$g = 978,049 \left(1 + 0,005288 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi \right) - 0,000308 h + 0,0000419 \cdot \rho \cdot h \quad (1.1)$$

b) nach Jeffreys (1948)²⁾

$$g = 978,0373 \left(1 + 0,0052891 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi \right) - 0,000308 h + 0,0000419 \cdot \rho \cdot h \quad (1.2)$$

¹⁾ Nach DIN – Norm Nr. 1304

²⁾ F. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 1, S. 140

Diese Formeln wurden im Laufe der Zeit durch neuere Erkenntnisse und genauere Messmethoden immer mehr verbessert, um so bessere Annäherungen an den realen Wert der Fallbeschleunigung auf allen Orten der Welt angeben zu können.

Heute wird in allen deutschen Eichämtern der Bezugswert für die Fallbeschleunigung g (in m/s^2) in Bezug auf die mittlere geographische Breite φ (in Grad) und die mittlere Höhe über dem Meeresspiegel h (in Metern) nach der momentanen „Standardformel zur Errechnung der Fallbeschleunigung“³⁾ (WELMEC⁴⁾ – Formel) berechnet:

$$g = 9,780318 \left(1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000058 \sin^2 2\varphi \right) - 0,000003085 h \quad (1.3)$$

Diese Formel „basiert auf einer Empfehlung der International Association of Geodesy (IAG) von 1967 [...] und ist aus der Definition des sogenannten Normalschwerefeldes abgeleitet, das eine sehr gute globale Näherung an das Schwerfeld der Erde darstellt“⁵⁾ (vgl. Abb. 1).

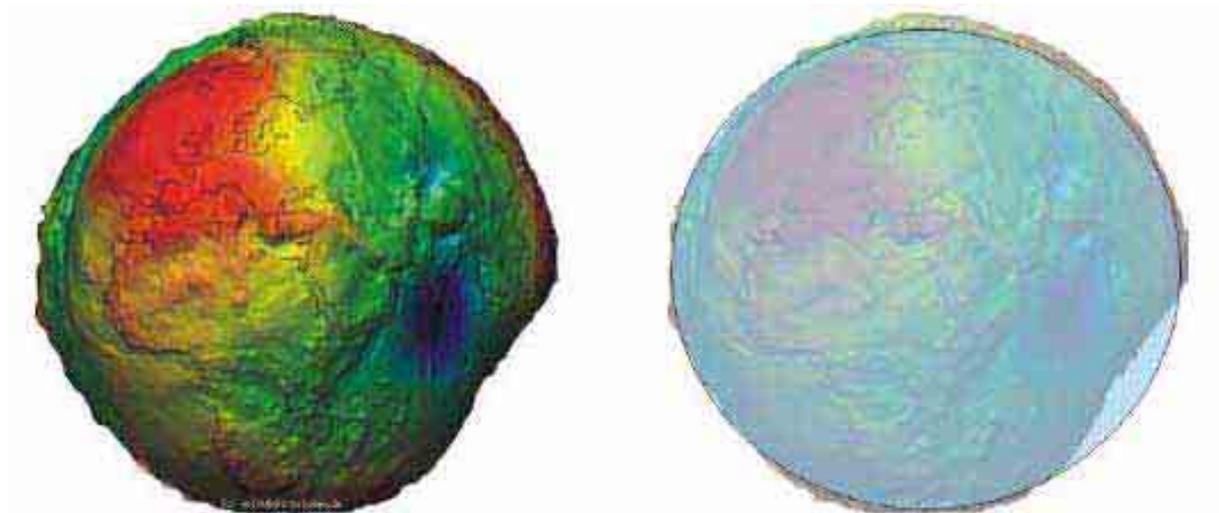


Abb. 1 : Links: Tatsächliche Form der Erde (Geoid) (Quelle: GeoForschungsZentrum Potsdam); rechts: angenäherte Form (Rotationsellipsoid) zur Berechnung des Normalschwerefeldes⁵⁾

2 Theoretische Fallbeschleunigungsbestimmung durch Normschwereformeln

Durch die drei Berechnungsformeln (1.1, 1.2 und 1.3) ist es möglich einen ungefähren Wert für die Fallbeschleunigung für den Standort der FH in Schweinfurt zu bestimmen. Diese theoretische Bestimmung von g ist ein Ziel dieser Facharbeit. Die WELMEC-Formel wird dabei im Gegensatz zu den beiden ersten Formeln, die nur wegen ihrer historischen Bedeutung mitberücksichtigt werden, auch auf Abweichung vom „wahren“ Wert von g untersucht.

³⁾ Verwaltungsvorschriften gesetzliches Messwesen, Anlage 6

⁴⁾ European Cooperation in Legal Metrology

⁵⁾ Europäisches Gravitationskonzept für eichpflichtige Waagen, Anlage 7

2.1 Berechnung der Fallbeschleunigung

Zur Berechnung der Fallbeschleunigung gemäß den Formeln 1.1 – 1.3 sind lediglich drei Größen notwendig: φ , h und ρ

Für den Versuchsstandort FH Schweinfurt sind die entsprechenden Werte sowie ihre Bestimmungsmethoden in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

Geographische Breite	$\varphi = 50^\circ 3' 24'' = 50,0567^\circ$	Abgelesen auf GPS Empfänger
Höhe über NN	$h = 229,7 \text{ m}$	Höhe des Erdgeschosses der FH (aus Bauplan entnommen) + 1 m Apparaturhöhe
Dichte der Gesteinsplatte	$\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3$	Telefonische Auskunft des Wasserwirtschaftsamtes Schweinfurt von Herrn Pitschka

Setzt man nun diese Größen in die zuvor genannten Fallbeschleunigungs-Berechnungsformeln ein, so erhält man folgende Ergebnisse:

Formel (1.1): Cassinis:

$$\begin{aligned}
 g &= 978,049(1 + 0,005288 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi) - 0,000308 h + 0,0000419 \cdot \rho \cdot h \\
 &= 978,049(1 + 0,005288 \sin^2 50,0567 - 0,0000059 \sin^2 (2 \cdot 50,0567)) - 0,000308 \cdot 229,7 + 0,0000419 \cdot 2,6 \cdot 229,7 \\
 &= 981,038 \text{ [cm/s}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{g = 9,81038 \text{ m/s}^2}$$

Formel (1.2): Jeffreys:

$$\begin{aligned}
 g &= 978,0373(1 + 0,0052891 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi) - 0,000308 h + 0,0000419 \cdot \rho \cdot h \\
 &= 978,0373(1 + 0,0052891 \sin^2 50,0567 - 0,0000059 \sin^2 (2 \cdot 50,0567)) - 0,000308 \cdot 229,7 + 0,0000419 \cdot 2,6 \cdot 229,7 \\
 &= 981,027 \text{ [cm/s}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{g = 9,81027 \text{ m/s}^2}$$

Formel (1.3): WELMEC-Formel:

$$\begin{aligned}
 g &= 9,780318(1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000058 \sin^2 2\varphi) - 0,000003085 h \\
 g &= 9,780318(1 + 0,0053024 \sin^2 50,0567 - 0,0000058 \sin^2 (2 \cdot 50,0567)) - 0,000003085 \cdot 229,7 \\
 &= 9,81004 \text{ [m/s}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{g = 9,81004 \text{ m/s}^2}$$

2.2 Beurteilung der Ergebnisse

Die so erhaltenen Fallbeschleunigungswerte können nicht ohne Vorbehalte mit dem „realen“ Wert der Erdbeschleunigung gleichgesetzt werden, da lokale Besonderheiten (wie z.B. dichteres Erdreich, Wassereinschlüsse, ...) in diesen für die gesamte Erde gültigen Formeln nicht berücksichtigt werden können. Deshalb stellen die zu Grunde liegenden Formeln lediglich Näherungsformeln dar.

Die WELMEC-Formel, die die momentane Standardformel zur Errechnung der Fallbeschleunigung darstellt, soll nun auf diese Abweichungen genauer untersucht werden.

Auch dem Eichamt sind die Ungenauigkeiten der WELMEC-Formel bekannt. Manchmal muss aber das Eichamt sehr genaue Werte für die Fallbeschleunigung angeben. Aus diesem Grund haben sie selbst sehr genaue Fallbeschleunigungsmessungen veranlasst, und können somit die relativen Ungenauigkeiten ihrer Formel angeben. Diese Ungenauigkeiten verdeutlicht die nachfolgende Grafik:

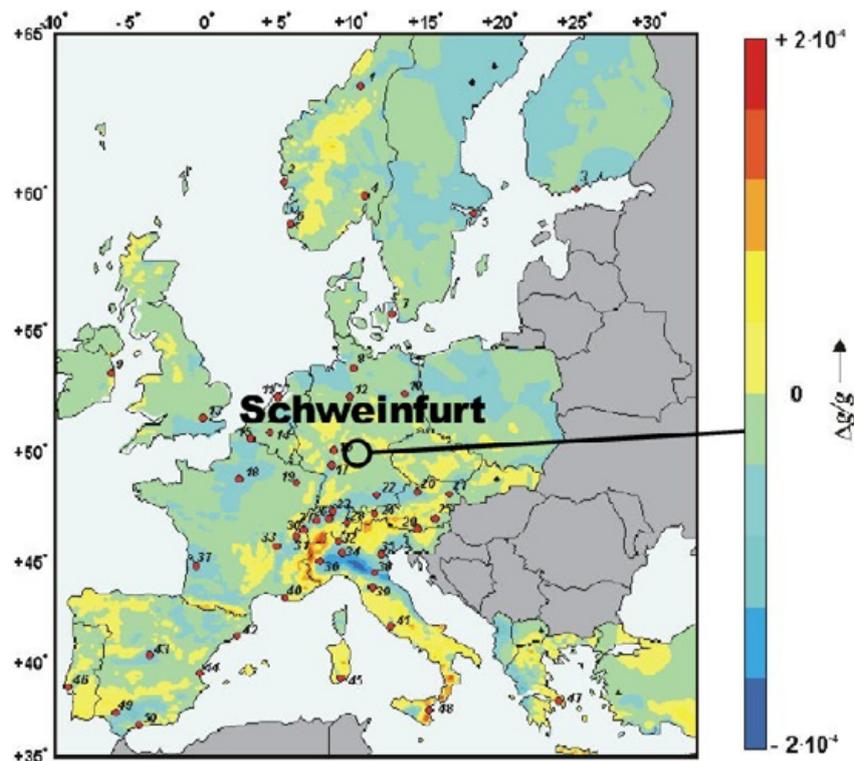


Abb. 2: Graphische Darstellung der relativen Schwereanomalien $\Delta g / g$ in Westeuropa.⁶⁾

Dabei wird anhand einer Farbskala für jedes geographische Gebiet aufgezeigt, wie sehr die Näherungsformel (1.3) von dem physikalischen Schwerfeld West-Europas abweicht. Durch die Farben Blau bis Grün bzw. Rot bis Gelb diejenigen Gebiete gekennzeichnet, für die die Näherungsformel zu hohe bzw. zu niedrige Werte angibt.

⁶⁾ Europäisches Gravitationskonzept für eichpflichtige Waagen, Anlage 7

Insbesondere wird an Abbildung 2 ersichtlich, dass sich Schweinfurt in einem grünen Bereich befindet, d.h., dass die durch die WELMEC Formel berechneten Fallbeschleunigungen in der Umgebung von Schweinfurt (Kreis) leicht zu hoch liegen. Konkret bedeutet dies, dass ein experimentell gemessener Wert der Fallbeschleunigung – dieser sollte bei ausreichender Versuchsgenauigkeit mit dem tatsächlichen Wert von g übereinstimmen – ein wenig unterhalb des durch die theoretische Formel berechneten Wertes liegen sollte.

3 Experimentelle Fallbeschleunigungsbestimmung mittels Präzisionspendel

Endgültige Klarheit darüber, welcher Fallbeschleunigungswert tatsächlich am Standort der FH in Schweinfurt (229,7 m über NN; 50° 3' 24'' Geographische Breite) vorliegt, kann aus den vorgenannten Gründen nur eine überaus genaue Messung, beispielsweise durch einen Pendelversuch, liefern. Aus diesem Grund habe ich im Rahmen dieser Facharbeit auch einen Präzisionspendelversuch an der FH Schweinfurt zur Bestimmung von g durchgeführt.

3.1 Herleiten der zu Grunde liegende Formel

Üblicherweise gilt für die Schwingungsdauer T eines harmonisch schwingenden mathematischen Pendels die Formel:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \begin{array}{l} T := \text{Schwingungsdauer des} \\ \text{Pendels} \\ l := \text{Pendellänge} \\ g := \text{Fall-, Erdbeschleunigung} \end{array} \quad (2.1)$$

Bei dem von mir an der Fachhochschule Schweinfurt benutzten Pendel handelt es sich nicht um ein derartig idealisiertes Pendel. Die Formel muss deshalb um Korrekturterme erweitert werden:

- **K1:** Da die Kugel keine Punktmasse darstellt, ist die endliche Ausdehnung der Kugel mit zu berücksichtigem.⁷⁾
- **K2:** Der dünne Draht, an dem die Kugel aufgehängt ist, kann nicht als masselos angesehen werden. Deshalb wird er in Relation zur Masse der Kugel gesetzt.⁷⁾
- **K3:** Zur Berücksichtigung der kleinen Winkelauslenkungen des Pendels⁸⁾

Die Korrekturen K1 und K2 kann man dadurch einhalten, dass man annimmt, dass das Pendel mit einer reduzierten Pendellänge l schwingt.⁷⁾

$$l = l_0 \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l_0^2} - \frac{1}{6} \frac{m}{M} \right) \quad \begin{array}{l} l_0 := \text{eigentliche Pendellänge} \\ l := \text{reduzierte Pendellänge} \\ r := \text{Kugelradius} \\ m := \text{Drahtmasse} \\ M := \text{Kugelmasse} \end{array} \quad (2.2)$$

⁷⁾ Korrekturterme nach F. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 1, S. 142

⁸⁾ Ergibt sich aus der vollständigen Auflösung der Differentialgleichung eines nichtmathematischen Pendels, nach F. Kohlrausch

Die Korrektur K3 wird dadurch erfüllt, dass man die Schwingungsdauer mit $(1+\alpha^2/16)$ ⁸⁾ multipliziert. Dadurch ergibt sich die (neue) Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0 \left(1 + \frac{2 r^2}{5 l_0^2} - \frac{1 m}{6 M}\right)}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) \quad \alpha := \text{mittlere Auslenkung in Rad} \quad (2.3)$$

, die bei diesem Experiment für dieses nicht-mathematische Pendel gelten soll.

3.2 Auflösen der Formel nach Fallbeschleunigung g

Löst man die Formel (2.3) nach g auf, so ergibt sich:

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)^2 \cdot l_0 \left(1 + \frac{2 r^2}{5 l_0^2} - \frac{1 m}{6 M}\right)}{T^2} \quad (2.4)$$

oder

$$g = 4\pi^2 \cdot l \cdot T^{-2} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)^2$$

Mit Hilfe dieser Darstellung soll an Hand eines Pendelversuchs die Fallbeschleunigung experimentell bestimmt werden.

3.3 Messprinzip

Dazu wurden von mir sechs Mal mit der an der Fachhochschule aufgebauten Pendel-Apparatur die zur Berechnung von g notwendigen Größen T, l, und α mit jeweils etwa zehn Versuchswiederholungen gemessen.

Durch Variation der drei Größen T, l, und α , von denen die Erdbeschleunigung g gemäß Formel (2.4) abhängt, sollen dabei weitere Erkenntnisse, die es später noch zu erörtern gilt, dargelegt werden. So wurde das Experiment mit zwei unterschiedlichen Pendellängen (l_1 und l_2) und jeweils drei Winkel ($\alpha_1 \approx 0,05$; $\alpha_2 \approx 0,10$; $\alpha_3 \approx 0,15$ Rad) durchgeführt. Dabei wird die Schwingungsdauer T von einer Stoppuhr elektronisch gemessen.

Hieraus ergeben sich folgende Messreihen:

Messreihe 1.1:	l_1	α_1	und	T
Messreihe 1.2:	l_1	α_2	und	T
Messreihe 1.3:	l_1	α_3	und	T
Messreihe 2.1:	l_2	α_1	und	T
Messreihe 2.2:	l_2	α_2	und	T
Messreihe 2.3:	l_2	α_3	und	T

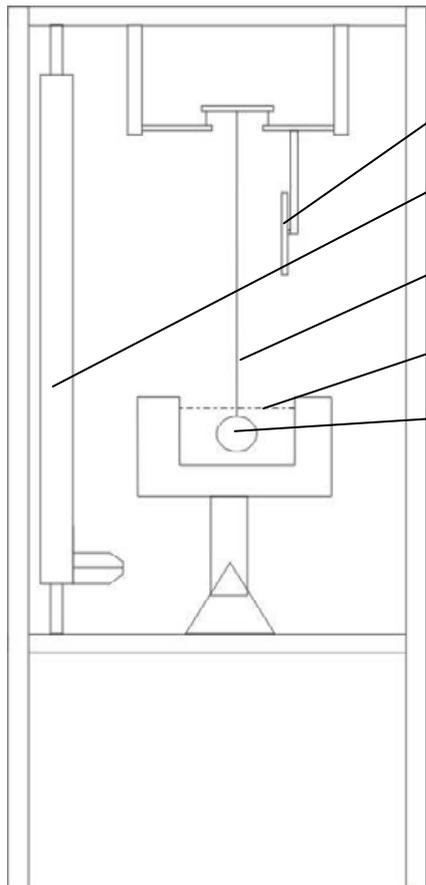
Anhand dieser Messergebnisse wurde die Fallbeschleunigung für jede Messreihe berechnet.

3.4 Versuchsvorbereitung

Der eigentliche Versuchsaufbau entfiel, da das erforderliche Präzisionspendel bereits an der FH-Schweinfurt aufgebaut ist und folgendermaßen aussieht⁹⁾:

Präzisionspendel:

(schematisch)



- Anzeige zur Bestimmung der Auslenkung = Winkelauslenkungsskala
- Schieblehre zur Längenmessung
- Pendel
- Lichtschanke zur Zeitmessung
- dahinter: Magnet, für eine konstante Anfangsauslenkung

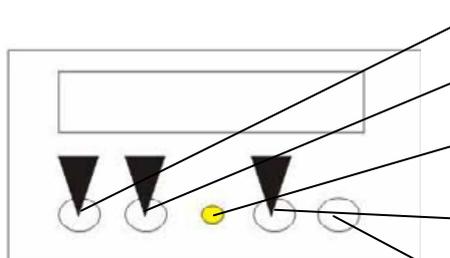
(Bild der Apparatur)



(Abb. 3 + Abb. 4)

Steuer- und Messeinheit:

(schematisch)



- Ein / Aus – Schalter für 12 V
- Magnet - Ein / Aus – Schalter
- Kontaktanzeige
- Zeituhr Start – Stopp - Schalter
- Zähler-Resetknopf

(Bild der Apparatur)



(Abb. 5 + Abb. 6)

⁹⁾ Weitere Bilder zur Messapparatur, Anlage 5, Seite 38

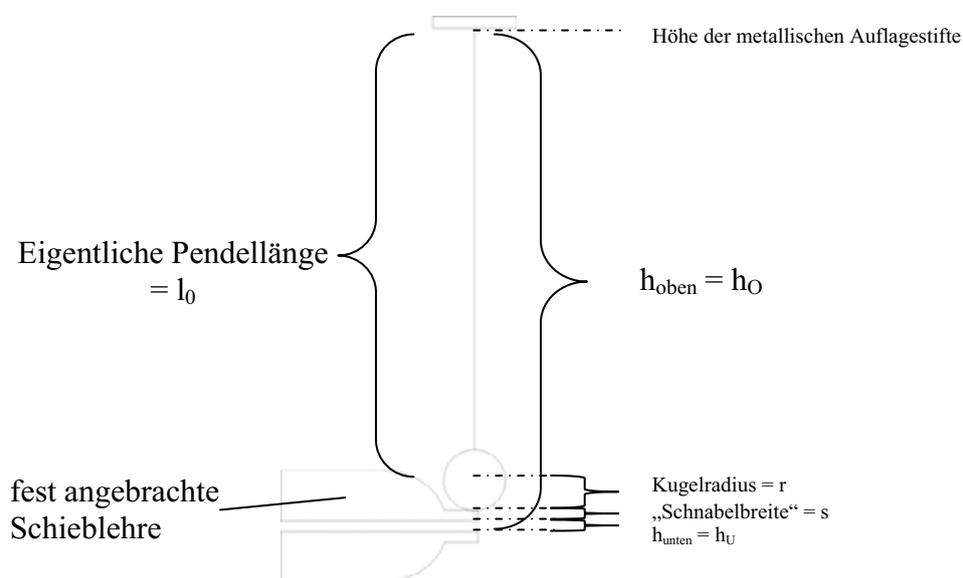
Zu Beginn der Messungen wurde jeweils die ordnungsgemäße Einstellung des Pendels überprüft. Insbesondere wurde darauf geachtet, ob der dünne Draht, an dem die Kugel aufgehängt ist, in Ruhelage durch den Null-Punkt der Winkelauslenkungsskala verläuft.

Bei der an die Lichtschranke gekoppelten Stoppuhr beschränkte sich die Prüfung darauf, ob jene die Stoppuhr an- und ausschaltete, wobei von der Richtigkeit der gemessenen Zeit ausgegangen werden musste.

3.5 Versuchsdurchführung

3.5.1 Bestimmung der reduzierten Pendellänge I

Noch vor den Schwingungsdauermessungen wurden für die Messreihe 1.1 bis 1.3 (mit l_1) und Messreihe 2.1 bis 2.3 (mit l_2) die eigentliche Pendellänge l_0 bestimmt:



(Abb. 7)

$$l_0 = h_O - h_U - s - r \quad (2.5)$$

Dazu war es notwendig die „Schnabelbreite“ s der an der Apparatur befestigten Schieblehre und der Kugeldurchmesser d mit einer Schieblehre zu messen. Diese Daten wurden auf dem Versuchsprotokoll¹⁰⁾ notiert. Wobei gilt:

$$r = \frac{d}{2} \quad (2.6)$$

Die beiden Größen h_O und h_U (vgl. Abb. 7) wurden sowohl vor den Messungen mit der Pendellänge l_1 bzw. l_2 als auch nach den Messungen mit der Pendellänge l_1 bzw. l_2 mit Hilfe der an dem Präzisionspendel fest installierten Schieblehre bestimmt. Dies erfolgte, um Umgebungseinflüsse (wie z. B. Luftdruck-, Temperaturänderungen), die die Länge des Pendels be-

¹⁰⁾ Versuchsprotokolle, Anlage 4, Seite 37

einflussen könnten, ausreichend zu berücksichtigen. Dabei erleichterte eine Anzeige auf der Steuer- und Messeinheit die Messung, da es dort eine Kontaktanzeige gab, die anzeigte, wann die Schieblehre die Metallkugel bzw. die metallischen Auflagestifte gerade berührte. Auch diese Messwerte wurden auf den Versuchsprotokollen notiert.

Aus dem Mittelwert dieser beiden Messungen wurde nun h_0 und h_U bestimmt.

Nun konnte jeweils l_0 für die beiden unterschiedlichen Längen (von Messreihe 1 und 2) mit Hilfe der Formel (2.5) und (2.6) berechnet werden. Die explizit berechneten Werte sind den nachfolgenden Zusammenfassungen eigener Ergebnisse¹¹⁾ zu entnehmen.

Um als Nächstes die reduzierten Pendellängen l berechnen zu können, fehlen gemäß der Formel

$$l = l_0 \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} - \frac{1}{6} \frac{m}{M} \right) \quad (2.7)$$

noch die Masse der Kugel M und die Masse des Drahtes m , an dem diese aufgehängt ist.

Dabei konnte das Gewicht der schwingenden Kugel mittels einer Waage leicht bestimmt werden. Die Masse des Drahtes m war bei der zusammengebauten Apparatur aber nicht messbar. Da das Präzisionspendel auch nicht unnötigerweise auseinander- und wieder neu zusammengebaut werden sollte, nur um das Gewicht des dünnen Drahtes zu bestimmen, wurden stattdessen die Länge l_{rev} und das Gewicht m_{rev} eines von Material und Durchmesser identischen Reverenzdrahtes gemessen.

Daraus konnte nun mittels Dreisatz das Gewicht des dünnen Drahtes nach der Formel

$$m = \frac{m_{rev}}{l_{rev}} (l_0 - r) \quad (l_0 - r) := \text{Wirkliche Drahtlänge vgl. Abb. 7} \quad (2.8)$$

berechnet werden.

Nun konnten die reduzierten Pendellängen für die einzelnen Messreihen berechnet werden, da alle nötigen Messgrößen zu dieser Berechnung vorlagen.

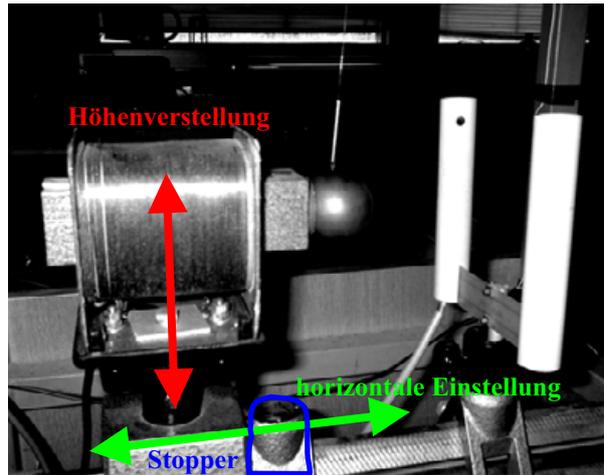
Die Messgrößen sind, zusammen mit den ausgerechneten Werten für l_0 , l und m in den folgenden Zusammenfassungen¹¹⁾ der einzelnen Messreihen nachzulesen. Außerdem wurden sämtliche festen Messgrößen, die bis zu diesem Zeitpunkt gemessen wurden, in den Versuchsprotokollen¹⁰⁾ notiert.

3.5.2 Messen von Schwingungsdauer T und Auslenkung α

Nachdem l bekannt ist, fehlen nun noch die Größen T und α zur Berechnung der Fallbeschleunigung. Bei der Bestimmung von T und α war es von großer Wichtigkeit, dass die Kugel zu Beginn der Messung immer eine vergleichbare Anfangsauslenkung besitzt.

¹¹⁾ Messreihen – Zusammenfassung eigener Ergebnisse, Anlage 1, Seite 24 - 29

Dies sollte durch einen an der Pendelapparatur angebrachten Elektromagneten gewährleistet werden. Dieser Magnet wurde zu Beginn jeder Messreihe horizontal, auf der Schiene, auf der er sich befand, so lange verschoben, bis die Kugel durch den Magneten angezogen die gewünschte Anfangsauslenkung besaß. Für die erste Messreihe 1.1 wurde der Magnet so eingerichtet, dass die Kugel



ungefähr um $0,05$ Rad ausgelenkt wurde (die Winkelauslenkung wurde dabei durch eine Skala (vgl. Versuchsaufbau) angezeigt). Nun wurde die Position des Elektromagnetfußes, der auf der Schiene bewegt werden konnte, in Richtung des Pendels durch einen Stopper markiert, sodass man ihn immer wieder bis zu dieser Position schieben konnte. Dadurch konnten nach Verschiebungen des Magneten immer wieder gleiche Anfangsauslenkungen eingestellt werden. Nach dieser Horizontaleinstellung wurde der Magnet in der Höhe noch so weit verstellt, bis der Eisenkern die Schwingkugel optimal in der Mitte traf, sodass er nach dem Ausschalten die harmonischen Schwingungen der Kugel nicht beeinflusst.

In zehn Messungen wurden nun T_{10} (Schwingungsdauer von 10 Schwingungen), α_a (Auslenkung am Anfang der Messungen) und α_e (Auslenkung am Ende der Messungen) zehnmal wie folgt gemessen:

1. Magnet einschalten
2. Kugel zum Magnet hinführen, bis er sie komplett anzieht
3. Magnet ausschalten und sofort auf seiner Schiene weitestmöglich von der freischwingenden Kugel wegbewegen, damit er diese nicht durch Restmagnetismus beeinflussen kann
4. Abwarten einiger Schwingungen, bis die Kugel ruhig schwingt
5. Ablesen des Anfangswinkels α_a und notieren desselben im Versuchsprotokoll
6. Bei voller Auslenkung der Kugel: Aktivierung der Lichtschrankengekoppelten Stoppuhr, sodass die Kugel beim nächsten Lichtschrankendurchgang die Stoppuhr startet
7. Abwarten von neun Vollschrwingungen
8. Zählgerät kurz vor Vollendung der 10. Schwingung ausschalten, damit die Kugel bei Lichtschrankendurchquerung die Stoppuhr anhält und die benötigte Zeit für zehn Schwingungen anzeigt.
9. Notieren dieser Zeit T_{10} im Versuchsprotokoll
10. Ablesen des Endwinkels α_e und notieren desselben im Versuchsprotokoll
11. Stoppuhr durch Reset-Knopf wieder auf Null stellen
12. Magnet wieder bis zum Stopper schieben, damit er die Kugel wieder um den gleichen Winkel auslenken kann.

Nach zehnmaliger Durchführung dieser Anleitung wurde die Messapparatur durch Magnetverschiebung, auf den zweiten Winkel von ca. 0,10 Rad eingestellt und wieder zehn Messungen nach demselben Ablauf wie zuvor durchgeführt. Auch diesmal wurden wieder alle Messergebnisse in den Versuchsprotokollen festgehalten. Analog wurden diese Messungen anschließend auch für den dritten Winkel von 0,15 Rad und alle drei Winkel der Pendellänge l_2 durchgeführt.

Die bei diesen Durchführungen erhaltenen Werte sind dabei in den Messprotokollen¹⁰⁾ eingetragen worden und wurden in die Messreihenzusammenfassungen¹¹⁾ übertragen.

In diesen Zusammenfassungen ist auch jeweils der Mittelwert der Schwingungsdauermessungen für zehn Schwingungen, der Mittelwert aller zwanzig Winkelmessungen (zehn Anfangswinkel; zehn Endwinkel) und unter Berücksichtigung der Formel

$$T = \frac{T_{10}}{10} \quad T := \text{Schwingungsdauer einer Schwinung} \quad (2.9)$$

der Mittelwert der Schwingungsdauer einer Einzelschwingung berechnet worden.

Da nun alle notwendigen Größen zur Berechnung der Erdbeschleunigung g vorliegen, konnte die Erdbeschleunigung durch Formel (2.4)

$$g = 4\pi^2 \cdot l \cdot T^{-2} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)^2$$

berechnet werden.

3.5.3 Zusammenfassung der Messergebnisse¹²⁾

Messreihe Nr.	l	T Mittelwert	α Mittelwert	g Ausgerechnet
Messreihe 1.1	1183,17 mm	2,18265 s	0,0500 Rad	9,80786 m/s²
Messreihe 1.2	1183,17 mm	2,18391 s	0,1005 Rad	9,80586 m/s²
Messreihe 1.3	1183,17 mm	2,18567 s	0,1501 Rad	9,80528 m/s²
Messreihe 2.1	1156,77 mm	2,15811 s	0,0525 Rad	9,80865 m/s²
Messreihe 2.2	1156,77 mm	2,15921 s	0,0996 Rad	9,80743 m/s²
Messreihe 2.3	1156,77 mm	2,16088 s	0,1486 Rad	9,80716 m/s²

Bereits zu diesem Zeitpunkt wird ersichtlich, dass die g -Werte für die kürzere Pendellänge von 1156,77 mm leicht über denen der längeren Pendellänge von 1183,17 mm liegen. Außerdem nimmt die berechnete Fallbeschleunigung für beide Pendellängen mit zunehmendem Winkel ab. Eine genauere Betrachtung dieser Phänomene soll zu diesem Zeitpunkt aber noch

¹²⁾ Sämtliche Werte sind den Zusammenfassungen eigener Ergebnisse (Anlage 1, Seite 24 – 29) entnommen worden

nicht durchgeführt werden, da noch nicht ausgeschlossen werden kann, dass es sich nur um Messungenauigkeiten und somit um zufällige Erscheinungen handelt. Aufschluss darüber, in wie weit die durch die Messreihen erhaltenen Erdbeschleunigungswerte für eine genauere Untersuchung verwendet werden können, soll die nun folgende Fehlerrechnung liefern.

3.6 Fehlerrechnung

3.6.1 Herleiten einer Formel für den Relativfehler von g

Diese Fehlerrechnung muss lediglich für die zu Grunde liegende Formel

$$g = 4\pi^2 \cdot l \cdot T^{-2} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)^2 \quad (2.10)$$

durchgeführt werden.

Dabei wird bei dieser Formel zur Erleichterung der Term

$$1 + \frac{\alpha^2}{16} \quad (2.11)$$

durch x ersetzt, sodass die Erdbeschleunigung nun wie folgt dargestellt werden kann:

$$g = 4\pi^2 \cdot l \cdot T^{-2} \cdot x^2 \quad (2.12)$$

Zur Berechnung der Messunsicherheit von g, kann zwar schon auf diese Gleichung das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet werden. Wegen der vielen Faktoren und Exponenten wäre dies jedoch sehr umständlich. Deshalb ist es besser erst den natürlichen Logarithmus dieser Gleichung zu bilden, und erst danach, nachdem man die Gleichung gemäß den logarithmischen Rechenregeln umgewandelt und für die Fehlerrechnung vereinfacht hat, das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens anzuwenden:

$$\begin{aligned} \ln g &= \ln(4\pi^2 \cdot l \cdot T^{-2} \cdot x^2) \\ \ln g &= \ln 4\pi^2 + \ln l + \ln T^{-2} + \ln x^2 \\ \ln g &= \ln 4\pi^2 + \ln l - 2 \cdot \ln T + 2 \cdot \ln x \end{aligned}$$

Anwendung der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung¹²⁾

a) auf die „linke Seite“:

$$\begin{aligned} \Delta l.s. &= \sqrt{(f_g \cdot \Delta g)^2} \\ &= f_g \cdot \Delta g \\ &= \frac{1}{g} \cdot \Delta g \end{aligned}$$

b) auf die „rechte Seite“:

$$\begin{aligned} \Delta r.s. &= \sqrt{(f_l \cdot \Delta l)^2 + (f_T \cdot \Delta T)^2 + (f_x \cdot \Delta x)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{l} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{1}{T} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(2 \frac{1}{x} \cdot \Delta x\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta x}{x}\right)^2} \end{aligned}$$

f_k := Ableitung der Funktion $x(k)$ nach k
 Δk := Fehler der Größe k
k = g, l, T und x

¹²⁾ Papula, Lothar, Mathematische Formelsammlung, Abschnitt 3.3 Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Zufälligerweise ergibt die „linke Seite“ den Relativfehler von g . Gleichzeitig muss der Fehler der linken Seite $\Delta l.s.$ gleich dem Fehler der rechten Seite $\Delta r.s.$ sein, da sie ja schließlich beide, wenn auch durch verschiedene Weise, den Fehler von $\ln(g)$ berechnen. Wegen dieser Gleichheit kann man den Relativfehler $\frac{\Delta g}{g}$, auch wie folgt darstellen:

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta x}{x}\right)^2} \quad \begin{array}{l} \Delta l := \text{absoluter Fehler der} \\ \text{reduzierten Pendel-} \\ \text{länge} \\ \Delta T := \text{absoluter Zeitfehler} \\ \Delta x := \text{absoluter Fehler der} \\ \text{Größe } x \end{array} \quad (2.13)$$

wobei gilt:

$$x = 1 + \frac{\alpha^2}{16} \quad (2.14)$$

und weiterhin gilt für Δx nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz¹²⁾:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{(f_\alpha \cdot \Delta \alpha)^2} \\ &= \frac{2\alpha}{16} \cdot \Delta \alpha \\ &= \frac{\alpha}{8} \cdot \Delta \alpha \end{aligned} \quad \begin{array}{l} f_\alpha := \text{Ableitung der Funktion} \\ x(\alpha) \text{ nach } \alpha \\ \Delta \alpha := \text{Fehler der Auslenkung} \end{array} \quad (2.15)$$

und somit folgt mit (2.14) und (2.15):

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\frac{\alpha}{8} \cdot \Delta \alpha}{1 + \frac{\alpha^2}{16}} = \frac{\frac{\alpha}{8} \cdot \Delta \alpha}{\frac{16 + \alpha^2}{16}} = \frac{2\alpha \cdot \Delta \alpha}{16 + \alpha^2} \quad (2.16)$$

Setzt man nun die bei (2.16) erhaltene Formel in die Formel zur Berechnung des Relativfehlers von g (2.13) ein, so erhält man eine neue Darstellung des Relativfehlers:

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(2\frac{2\alpha \cdot \Delta \alpha}{16 + \alpha^2}\right)^2} \quad (2.17)$$

Weil α^2 sehr klein ist, und deshalb im Vergleich zu 16 vernachlässigbar ist und nach einer Kürzung von $2 \cdot 2$ mit 16, kann man (2.17) auch wie folgt vereinfachen:

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\alpha \cdot \Delta \alpha}{4}\right)^2} \quad (2.18)$$

Für diese Darstellung sollen nun die noch nicht bekannten Größen Δl , ΔT und $\Delta \alpha$ ermittelt werden, sodass abschließend der Relativfehler der Erdbeschleunigung $\frac{\Delta g}{g}$ errechnet werden kann und somit eine Bestimmung der Güte der Messwerte möglich ist.

3.6.2 Mittlerer Fehler Δl_0 der Längenmessung

Bevor man den mittleren Fehler der reduzierten Pendellänge Δl bestimmen kann, ist es notwendig den mittleren Fehler der Längenmessung Δl_0 zu ermitteln.

Wie schon bekannt ist, berechnet sich die Pendellänge über die Formel (2.5):

$$l_0 = h_0 - h_U - s - r$$

Auch bei dieser Formel erhält man die Messungengenauigkeit durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} \Delta l_0 &= \sqrt{(f_{h_0} \cdot \Delta h_0)^2 + (f_{h_U} \cdot \Delta h_U)^2 + (f_s \cdot \Delta s)^2 + (f_r \cdot \Delta r)^2} \\ \Delta l_0 &= \sqrt{(1 \cdot \Delta h_0)^2 + (-1 \cdot \Delta h_U)^2 + (-1 \cdot \Delta s)^2 + (-1 \cdot \Delta r)^2} \\ \Delta l_0 &= \sqrt{(\Delta h_0)^2 + (\Delta h_U)^2 + (\Delta s)^2 + (\Delta r)^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wobei gilt:

Fehler der h_0 -Messung	$\Delta h_0 =$	$\pm 0,05 \text{ mm}$	Wegen der Messungengenauigkeit der an der Apparatur angebrachten Schieblehre von 1/20 mm
Fehler der h_U -Messung	$\Delta h_U =$	$\pm 0,05 \text{ mm}$	Wegen der Messungengenauigkeit der an der Apparatur angebrachten Schieblehre von 1/20 mm
Fehler der Schnabelbreitemessung	$\Delta s =$	$\pm 0,05 \text{ mm}$	Wegen der Messungengenauigkeit der zur Bestimmung von s verwendeten Schieblehre von 1/20 mm
Fehler der Radiusbestimmung	$\Delta r =$	$\pm 0,025 \text{ mm}$	Wegen der Halbierung des Durchmessers, halbiert sich auch die Messungengenauigkeit von 1/20 mm, da der relative Fehler und nicht der absolute Fehler bei einer Multiplikation mit einer Konstanten gleich bleibt. ¹⁴⁾

Bei beiden Pendellängen l_1 und l_2 ist die Messungengenauigkeit der Längenmessungen gleich (die Messgenauigkeiten der Schieblehre hat sich bei den unterschiedlichen Längen nicht verändert) und somit ist auch der absolute Fehler der Längenmessung für beide Pendellängen gleich und besitzt den Wert:

$$\Delta l_0 = \sqrt{(0,05\text{mm})^2 + (0,05\text{mm})^2 + (0,05\text{mm})^2 + (0,025\text{mm})^2} \approx \pm 0,1 \text{ mm} .$$

3.6.3 Mittlerer Fehler Δl der reduzierten Pendellänge

Der Faktor, mit dem man l_0 multiplizieren muss, um die reduzierte Pendellänge zu erhalten, trägt zum Gesamtfehler von l nur vernachlässigbar wenig bei, sodass man diesen Faktor als Fehlerneutral annehmen kann.

$$l = l_0 \left(1 + \overbrace{\frac{2 r^2}{5 l_0^2} - \frac{1}{6 M}}^{\text{sehr klein} \approx 0} \right)$$

Fehlerneutral und Wert von etwa 1

¹⁴⁾ http://intra.fh-heilbronn.de/IFG/gr_labor/FR.pdf

Dies hat natürlich zur Folge, dass sich der mittlere Fehler der Längenmessung, bei der Multiplikation mit einer fehlerneutralen Größe, die etwa den Wert 1 besitzt, nicht verändert:

$$\Delta l = \Delta l_0 \approx \pm 0,1 \text{ mm}$$

3.6.4 Bestimmung des Mittleren Fehlers von T und α

Die Messreihen zur Bestimmung von ΔT und $\Delta \alpha$ stellen jeweils normalverteilte Messreihen in der Form x_1, x_2, \dots, x_n bestehend aus n Messwerten gleicher Genauigkeit dar (gleiche Meßmethode, gleiches Messinstrument, gleicher Beobachter).

Der „günstigste“ Schätzwert für den wahren Wert der Messgröße x einer derartigen Messreihe ist dabei der arithmetische Mittelwert¹⁵⁾:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.20)$$

Der mittlere Fehler der Einzelmessung (die Abweichung des Messwertes x_i vom Mittelwert \bar{x}) kann dabei durch¹⁵⁾

$$s_{\bar{x}_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.21)$$

berechnet werden. Aus diesem kann man nun weiterhin den mittleren Fehler des Mittelwerts und somit den gesuchten Wert für Δx berechnen¹⁵⁾:

$$\Delta x = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)n}} = \frac{s_{\bar{x}_i}}{\sqrt{n}} \quad (2.22)$$

Diese allgemeinen Formeln zur Berechnung des Mittelwerts \bar{x} und des mittleren Fehlers Δx wurden nun auf T und α für alle sechs Messreihen durchgeführt. Dabei wurde jeweils auf realistische Messungenauigkeiten aufgerundet (Zeitmessung Rundung auf 4. Stelle, Winkelmessung Rundung auf 3. Stelle).

Diese Berechnungen sind in den Messreihen – eigene Berechnungen¹⁶⁾ nachzulesen.

3.6.5 Relativfehler von g

Nun liegen alle nötigen Größen zur Berechnung der Formel (2.18)

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\alpha \cdot \Delta \alpha}{4}\right)^2} \quad \text{vor.}$$

¹⁵⁾ Papula, Lothar, Mathematische Formelsammlung, Abschnitt 2 Mittelwert und mittlerer Fehler einer Messreihe

¹⁶⁾ Messreihen – eigene Berechnungen, Anlage 2, Seite 30 – 35

Daher konnte der relative Fehler der Fallbeschleunigungsmessung für alle Messreihen bestimmt werden und wurde sinnvollerweise auf die 2. Stelle aufgerundet.

Die Werte für l , T und α wurden den Messreihenzusammenfassungen¹¹⁾ und Δl , $\Delta T = \Delta T_{10}/10$ und $\Delta \alpha$ den Messreihen-Auswertungen¹⁶⁾ entnommen.

Messreihe Nr.	l in mm	Δl in mm	T in s	ΔT in s	α in Rad	$\Delta \alpha$ in Rad	$\frac{\Delta g}{g}$ in %
1.1	1183,17	0,1	2,18265	0,00002	0,0500	0,001	0,01
1.2	1183,17	0,1	2,18391	0,00002	0,1005	0,001	0,01
1.3	1183,17	0,1	2,18567	0,00002	0,1501	0,001	0,01
2.1	1156,77	0,1	2,15811	0,00002	0,0525	0,001	0,01
2.2	1156,77	0,1	2,15921	0,00002	0,0996	0,001	0,01
2.3	1156,77	0,1	2,16088	0,00002	0,1486	0,001	0,01

Aus diesen relativen Fehlern der Fallbeschleunigung $\frac{\Delta g}{g}$ konnte nun durch eine Multiplikation mit den zuvor erhaltenen Werten der Fallbeschleunigung (vgl. Zusammenfassung der Messergebnisse¹⁷⁾) die absolute Messungenauigkeit dieser Fallbeschleunigungsmessung berechnet werden.

$$\Delta g = \frac{\Delta g}{g} \cdot g$$

Messreihe 1.1	$\Delta g = 0,001 \text{ m/s}^2$
Messreihe 1.2	$\Delta g = 0,001 \text{ m/s}^2$
Messreihe 1.3	$\Delta g = 0,001 \text{ m/s}^2$
Messreihe 2.1	$\Delta g = 0,001 \text{ m/s}^2$
Messreihe 2.2	$\Delta g = 0,001 \text{ m/s}^2$
Messreihe 2.3	$\Delta g = 0,001 \text{ m/s}^2$

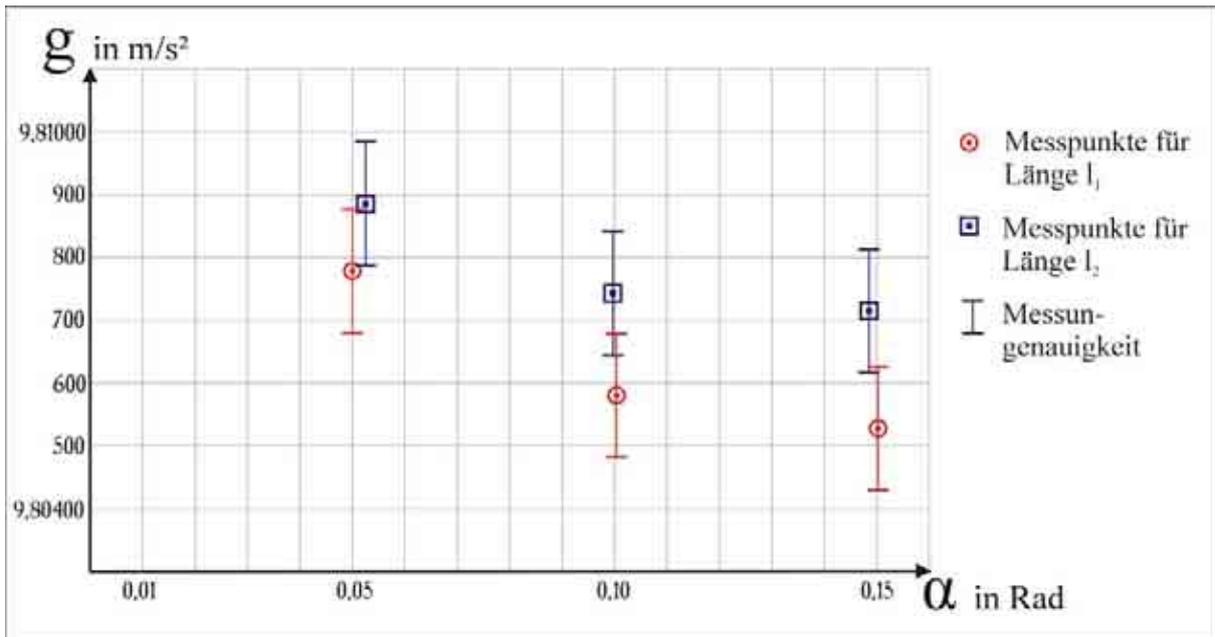
Durch diese Angaben kann man ein Intervall angeben, in dem der „wahre Wert“ der Fallbeschleunigung für dieses Experiment mit hoher Wahrscheinlichkeit zu vermuten ist ($\hat{=}$ Fehlerintervall).

$$g = \bar{g} \pm \Delta g \quad (2.23)$$

3.7 Angabe der ermittelten Fallbeschleunigungen mit Fehlerintervall

Messreihe 1.1	$g = 9,80786 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$
Messreihe 1.2	$g = 9,80586 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$
Messreihe 1.3	$g = 9,80528 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$
Messreihe 2.1	$g = 9,80865 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$
Messreihe 2.2	$g = 9,80743 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$
Messreihe 2.3	$g = 9,80716 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$

¹⁷⁾ Zusammenfassung der Messergebnisse, Seite 13



Bei den eben angeführten Fallbeschleunigungen ist immer zu beachten, dass die ermittelten Werte nur für den spezifischen Versuchsstandort an der Fachhochschule Schweinfurt, und nur für die verwendete Berechnungsformel einschließlich aller darin enthaltenen Korrekturen und Vernachlässigungen gelten. Grobe oder systematische Fehler, wie Zahlendreher, Ablesefehler, Fehler in der Apparatur oder Fehler in der zu Grunde liegenden Formel, die natürlich durch mehrmaliges Überprüfen zu vermeiden versucht wurden, konnten weder bei den Berechnungen der Erdbeschleunigung noch bei der Fehlerrechnung berücksichtigt werden und könnten eventuell die Ergebnisse verfälschen.

Insgesamt sollten bei diesem Experiment vergleichbare Werte für g herauskommen oder die durch die Fehlerrechnung ermittelten Intervalle, in denen die Fallbeschleunigung liegen kann, sollten sich überlappen. Da dies offensichtlich nicht der Fall ist (die Ergebnisse der Messreihe 1.3 und 2.1 unterscheiden sich sehr stark voneinander), musste eine Erklärung für dieses Phänomen gefunden werden.

Deshalb wurden die erhaltenen Ergebnisse nochmals genauer betrachtet, wobei auffällig war, dass die Werte für g mit zunehmendem Winkel (von Messreihe 1.1 bis 1.3 und von Messreihe 2.1 bis 2.3) abnehmen. Da Zahlendreher und Ablesefehler eigentlich ausgeschlossen werden können und der Messapparatur die volle Funktionsfähigkeit zu unterstellen ist, scheint es so, dass der Auslenkungswinkel des Pendels in der Berechnungsformel (2.2) keine ausreichende Berücksichtigung findet. Es gibt zwar einen Korrekturterm (Korrekturterm K3 vgl. Herleiten der zu Grunde liegende Formel¹⁸⁾) für die endliche Winkelauslenkung, der aber nicht beachtet, dass bei weiteren Auslenkungen auch der von der Kugel zurückgelegte Weg pro Schwingung zunimmt.

¹⁸⁾ Zu Grunde liegende Formel, Seite 7 - 8

Bei annähernd gleichen Schwingungsdauern aller Messungen muss sich folglich die Kugel mit höherer Geschwindigkeit bewegen. Somit nimmt auch die Luftreibung ($F_R \sim v$) zu, die die Kugel abbremst und dadurch die g -Werte nach unten verfälscht. Dies könnte natürlich dadurch behoben werden, dass man die Messungen bei sehr kleinen Winkeln oder optimalerweise bei 0° Auslenkung durchführt, was jedoch in der Praxis nicht möglich ist, da dann das Pendel zu wenig bzw. gar nicht schwingen würde.

Ein linearer Zusammenhang zwischen g und α ist aber sehr wahrscheinlich. Deshalb kann nachträglich für beide Pendellängen eine Ausgleichs- oder Regressionsgerade durch die jeweiligen drei Winkel und deren g 's gezogen werden. Diese Geraden erlauben Rückschlüsse auf die Erdbeschleunigungen von sehr kleinen Winkeln oder von 0° .

Diese Regressionsgerade wird dabei wie folgt ermittelt¹⁹⁾:

$$g = a \alpha + b$$

Mit¹⁹⁾:

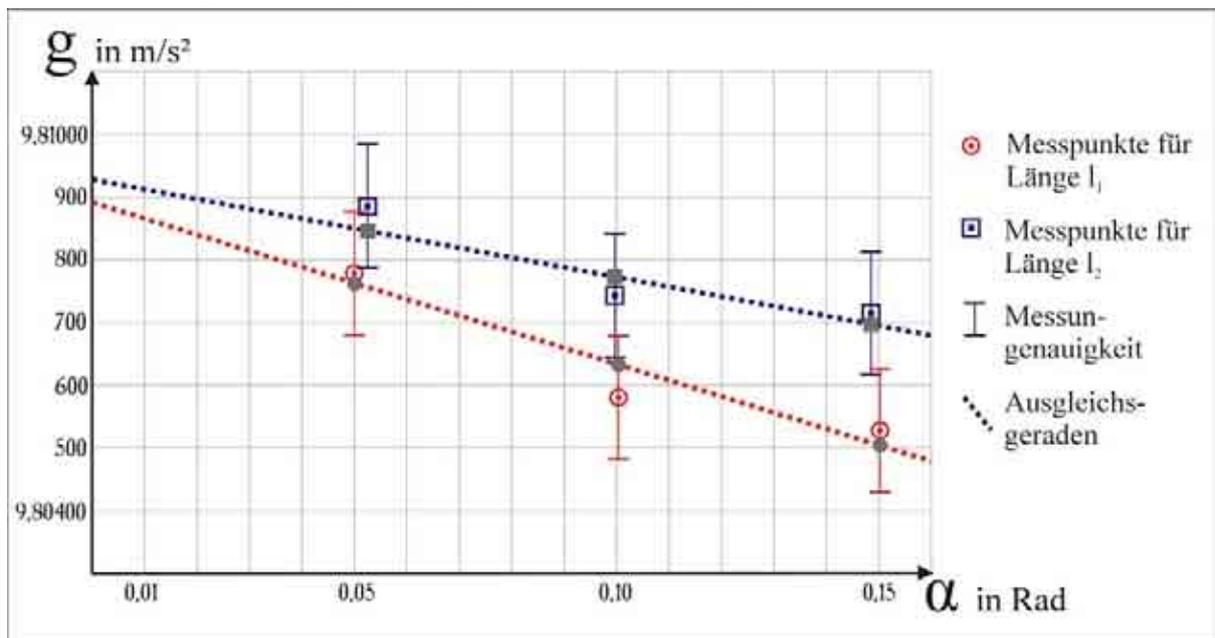
$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n g_i \right)}{\Delta}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n g_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \right)}{\Delta}$$

$$\Delta = n \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2$$

α_i := Auslenkung des i . Messergebnisses
 g_i := Erdbeschleunigung des i . Messergebnisses
 n = Anzahl der Messpunkte

Die Berechnungen der Regressionsgeraden sind der Anlage Nr. 3²⁰⁾ zu entnehmen.



¹⁹⁾ Papula, Lothar, Mathematische Formelsammlung, Abschnitt 4.2 Ausgleichs- oder Regressionsgerade nach Gauß

²⁰⁾ Berechnung der Regressionsgeraden, Anlage 3, Seite 36

Setzt man nun in die erhaltenen Regressionsgeraden

bei l_1 :

$$g_1 \text{ (3.bis 5. Stelle)} = -2581,6 \alpha + 892,0$$

bei l_2 :

$$g_2 \text{ (3.bis 5. Stelle)} = -1543,7 \alpha + 929,4$$

$\alpha = 0^\circ$ ein, so erhält man vermutete g -Werte für einen Winkel von 0° .

$$g_1 \text{ (3.bis 5. Stelle)} = 892$$

$$g_2 \text{ (3.bis 5. Stelle)} = 929$$

Da aber sämtliche Messmethoden gleich bleiben, muss auch die Messgenauigkeit gleich bleiben. Somit kann die Fallbeschleunigung wie folgt dargestellt werden.

$$g_1 = 9,80892 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$$

Erdbeschleunigungswert für Pendellänge l_1 und
Winkelauslenkung von $\alpha = 0^\circ$

$$g_2 = 9,80929 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$$

Erdbeschleunigungswert für Pendellänge l_1 und
Winkelauslenkung von $\alpha = 0^\circ$

Bei diesen Fallbeschleunigungswerten sind nun die Energieverluste durch Luftreibung, die zuvor noch nicht berücksichtigt werden konnte, gleich Null, da das Pendel – nach der theoretischen Vorstellung, die durch die Regressionsgerade erreicht wurde – nicht ausgelenkt wird und sich somit auch nicht bewegt (Ohne Bewegung kann es auch keine Luftreibung geben). Somit sind dies die genauesten möglichen Werte für die Fallbeschleunigung, die ich mit den Mitteln der Fachhochschule Schweinfurt erreichen konnte.

Bildet man nun den Mittelwert dieser beiden Werte so erhält man den im Rahmen dieser Facharbeit ermittelten Fallbeschleunigungswert für den Standort der Fachhochschule Schweinfurt von:

$$g = 9,80911 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$$

(Ermittelt für die Höhe von 229,7 m über NN und $50^\circ 3' 24''$ Geographische Breite)

4 Abschlussbeurteilung und Ausblick

Insgesamt bin ich davon überzeugt, dass ich mit diesem Experiment einen sehr guten Näherungswert für die Erd- oder Fallbeschleunigung am Standort der FH bestimmt habe.

Ich habe zwar nicht alle theoretisch möglichen Korrekturterme bei der Bestimmung von g mittels Fadenpendel verwendet. Unberücksichtigt blieben z. B.:

- *Luftdichte-Korrektion*²¹⁾

„Sie wird am besten durch Arbeiten im Hochvakuum vermieden, bei

²¹⁾ F. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 1, S. 142 Abschnitt 2.431 31

Reversionspendel näherungsweise auch durch symmetrische Formgebung²²⁾;

„Der beobachtete Wert von g ist durch Multiplikation mit

$$1 + 1,6 \frac{\rho_l}{\rho_p}$$

ρ_l := Dichte der Luft
 ρ_p := Mittlere Dichte
des Fadenpendels

wegen Luftdichte zu korrigieren.“²²⁾

- *Mitschwing-Korrektur*²³⁾

„Das Pendelstativ schwingt etwas mit $(0,1 \mu\text{m})$ “²³⁾.

g ist dann mit dem Faktor

$$1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_{1m}} \frac{T}{\pi t}$$

α_{1m} := mittlere Amplitude des Pendels
 $t; \alpha_2$:= Zeit, die ein Zweitpendel benötigt, um den Winkel α_2 zu erreichen
 T := Schwingungsdauer

zur Korrektur des Mitschwingens zu multiplizieren.

- *Temperatur-Korrektur*²⁴⁾

„Der gemessene Wert von g ist mit

$$1 + \beta(T - T_0)$$

T_0 := Bezugstemp. bei der Messung der reduzierten Pendellänge
 T := Messtemperatur
 β := mittlerer Ausdehnungskoeffizient

zu multiplizieren.“²⁴⁾

Diese weiteren Korrekturen würden einen relativ geringen Genauigkeitszuwachs bringen, würden dabei aber auch die möglichen Fehlerquellen erhöhen. Außerdem sind manche dieser Korrekturen mit den Gegebenheiten an der Fachhochschule Schweinfurt nicht durchführbar. Die Luftdichte-Korrektur wurde nachträglich durch die Regressionsrechnungen (Korrektur auf 0°) berücksichtigt, da sie, wie an den Messreihenergebnissen gezeigt, beachtenswert ist.

Der in meiner Facharbeit ermittelte Wert von $9,80911 \text{ m/s}^2$ liegt nahe bei den Werten, die mit den historischen theoretische Formeln berechnet wurden (Cassinis: $9,81038 \text{ m/s}^2$, Jeffreys: $9,81027 \text{ m/s}^2$). Er liegt zudem leicht unter dem Wert von $9,81004 \text{ m/s}^2$, der durch die WELMEC-Formel berechnet wurde (diesen Wert verwendet auch das Eichamt Schweinfurt). Gemäß der Ausführungen in Abschnitt 2.2 „Beurteilung der Ergebnisse“²⁵⁾ sollte dies auch so sein. Dies bestätigt die hervorragende Qualität meiner Ergebnisse.

Abschließend lässt sich formulieren:

Der exakte Erdbeschleunigungswert an der Fachhochschule Schweinfurt (229,7 m über NN und $50^\circ 3' 24''$ Geographische Breite) ist $g = 9,80911 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$

²²⁾ F. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 1, S. 142 Abschnitt 2.431 31

²³⁾ F. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 1, S. 142 Abschnitt 2.431 32

²⁴⁾ F. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 1, S. 142 Abschnitt 2.431 33

²⁵⁾ Beurteilung der Ergebnisse, Seite 6

5 Literaturverzeichnis

5.1 Bücher

F. Kohlrausch, PRAKTISCHE PHYSIK, Zum Gebrauch für Unterricht, Forschung und Technik, Band 1, 21. überarbeitete und ergänzte Auflage 1960, Teubner Verlagsgesellschaft

Papula, Lothar, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3, Vektoranalysis Wahrscheinlichkeitsrechnung Mathematische Statistik Fehler- und Ausgleichsrechnung, 2. Auflage, Viewegs Fachbücher der Technik

Papula, Lothar, Mathematische Formalsammlung, Viewegs Fachbücher der Technik

Böge, Alfred, Technische Mechanik, Statik – Dynamik – Fluidmechanik – Festigkeitslehre, 23. Auflage, Viewegs Fachbücher der Technik

Heywang Nücke Timm, Physik für Techniker, 18. Auflage, Handwerk und Technik

Herr, Horst, Mechanik der festen Körper, 1. Auflage 1991, Bibliothek des Technikers

5.2 Internetseiten

http://intra.fh-heilbronn.de/IFG/gr_labor/FR.pdf
Aufrufdatum: 14.09.2004

<http://www.ptb.de/de/org/1/11/115/doc/gravzonen.pdf>
Aufrufdatum: 25.08.2004

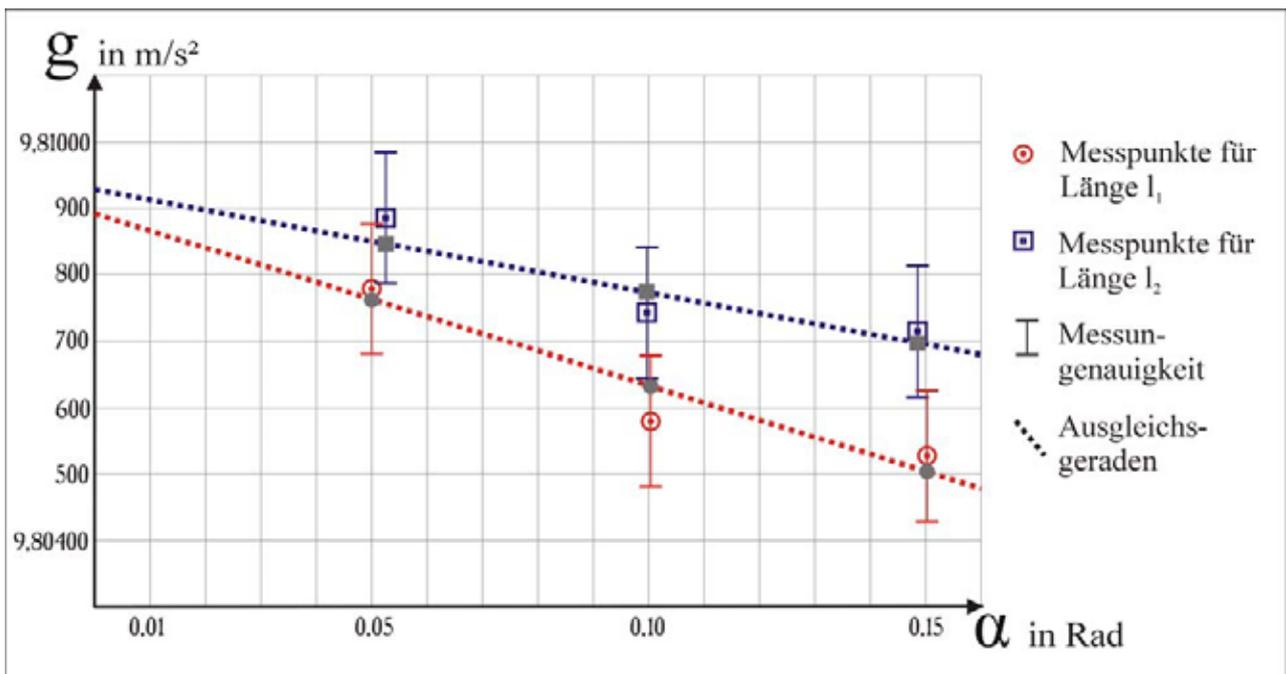
[http://www.physik.uni-stuttgart.de/studium/praktika/ap/pdf_dateien/
Allgemeines/Fehlerrechnung.pdf](http://www.physik.uni-stuttgart.de/studium/praktika/ap/pdf_dateien/Allgemeines/Fehlerrechnung.pdf)
Aufrufdatum: 21.11.2004

http://www.geocities.com/remark_44/physik/FH-Versuche/pendel1.zip
Aufrufdatum: 21.11.2004

5.3 Sonstige Quellen

Verwaltungsvorschriften gesetzliches Messwesen, vom Eichamt Würzburg, Abschnitt 5 Einflussgrößen, Stand: 09.01.2002

Das europäische Gravitationszonenkonzept für eichpflichtige Waagen, aus PTBmit...
Recht und Technik, PTB-Mitteilungen 113 (2003), Heft 1



Anlage 4, Versuchsprotokolle

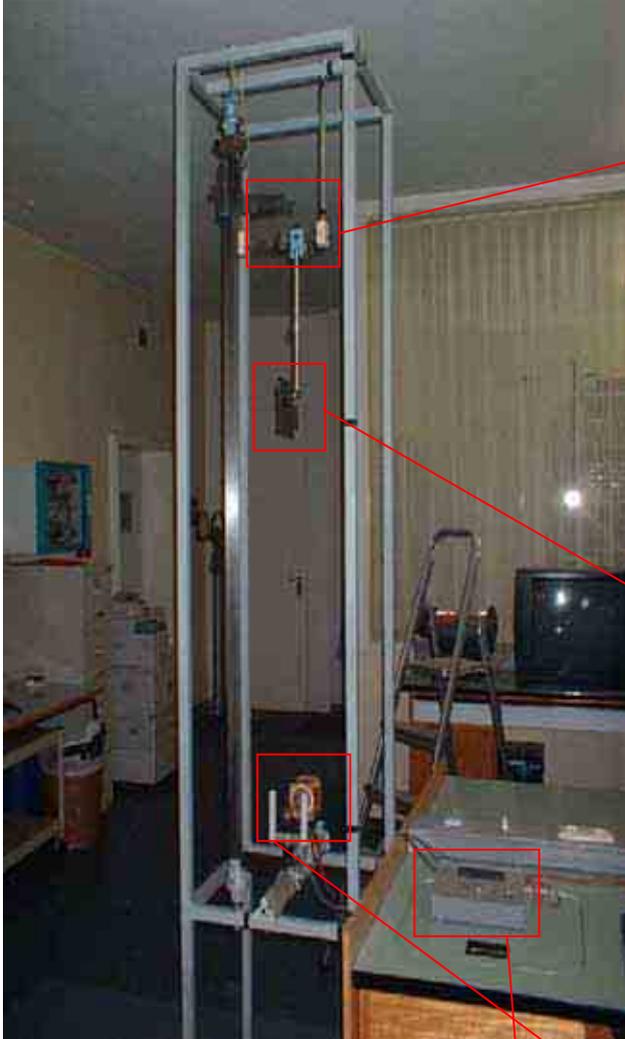
Nachfolgend sind meine beiden Versuchsprotokolle beigefügt, die ich während der Versuche am 25.06.2004 und am 01.07.2004 vervollständigte und in die ich die Messergebnisse eintrug.

Vor Beginn der Messungen wurden die Protokolle von mir vorbereitet und zwar in Anlehnung an die Versuchszusammenfassung von Christian Kraemer und Jens Marwan vom 08.05.2000.

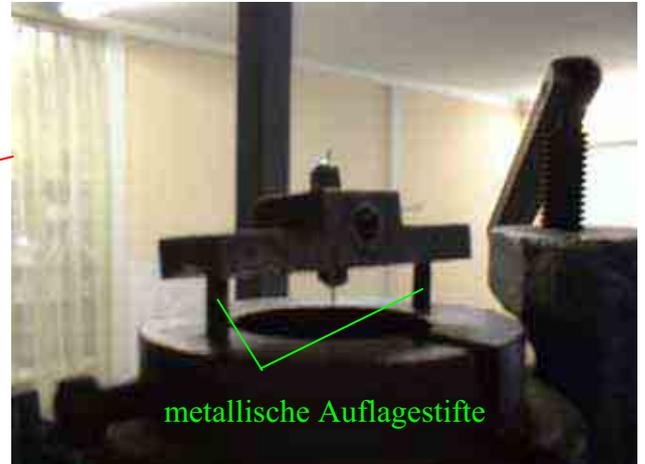
(Quelle: http://www.geocities.com/remark_44/physik/FH-Versuche/pendel1.zip)

Anlage 5, Bilder zur Messapparatur

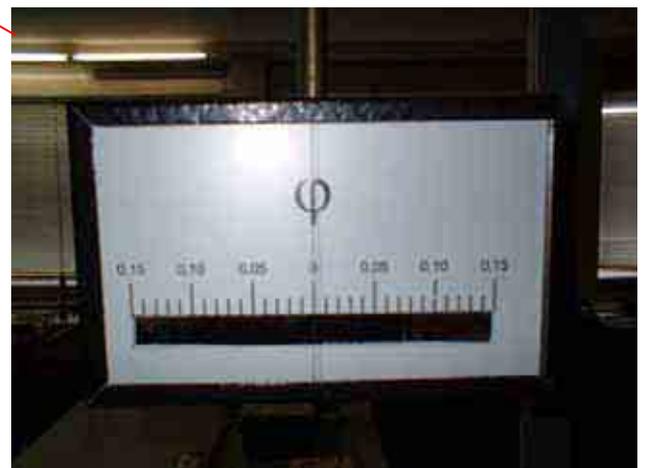
Messapparatur



Obere Pendelbefestigung



Winkelauslenkungsskala



Steuer und Messeinheit



Magnet + Lichtschranke



Danksagung

Ein herzliches Dankeschön an Herrn Reiner Fischer Dipl. Ing. (FH) für die Mithilfe bei der Durchführung der Präzisionsmessung. Herr Fischer hat mich außerdem bei der Beschaffung der Literatur unterstützt und mich bei physikalischen und mathematischen Fragen beraten. Des Weiteren will ich mich bei der Fachhochschule Schweinfurt bedanken, die mir erlaubt hat die dort befindliche Apparatur zur Bestimmung der Fallbeschleunigung g , zu nutzen.

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.

Schweinfurt, den 22. November 2004

.....

Stefan Englert

Note:

Punkte:

Zurückgegeben am:

Unterschrift der
Kursleiterin: