Funktionentheorie I und Topologie Diplomsprotokoll

Datum: Januar 2010
Prüfer: Prof. Dr. Jörn Steuding
Note: 1.0

Ich hatte lediglich Funktionentheorie I bei Herrn Prof. Dr. Steuding gehört.

Das erste Thema der Prüfung bei Herrn Steuding kann man sich immer heraussuchen. Ich hatte mich für Trennungseigenschaften in der Topologie entschieden und kurz begründet warum ich dies gewählt hatte (zentrales Konzept der Topologie).

Dabei bin ich auf die verschiedenen Trennungseigenschaften T_1 bis T_4 eingegangen und habe kurz erwähnt, dass man für jede einen Raum konstruieren kann, der genau diese erfüllt. Dabei habe ich diese Beispiele jeweils kurz skizziert. Anschließend hatte ich erwähnt, dass ein metrischer Raum schon normal ist und dass hausdorff schon charakterisiert, dass jedes Netz maximal einen Grenzwert hat. Abschließend bin ich darauf eingegangen, dass man die Hausdorffeigenschaft auch für kompakte Räume fordert, um bspw. zu zeigen, dass kompakte Mengen abgeschlossen sind.

Danach hatte mich Herr Steuding unterbrochen. Er erkundigte sich, ob wir in unserer Vorlesung den Satz von Heine-Borell besprochen haben. Daraufhin bin ich auf den endlichen und unendlichen Tychonoff eingegangen, aus dem dies als Korollar folgt. Dabei habe ich erwähnt, dass wir für den unendlichen Tychonoff eine andere Charakterisierung der Kompaktheit (über endliche Durchschnittseigenschaft) sowie das Lemma von Zorn verwendet haben. Daraufhin wollte er, dass ich die endliche Durchschnittseigenschaft auf dem Blatt notiere (kein Beweis). Herr Steuding wollte nun ein Beispiel dafür, wo wir den unendlichen Tychonoff verwendet haben. Ich hab das Beispiel der Cantormenge genannt, da diese homöomorph zu $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ ist. Diese Homöomorphie sollte ich dann motivieren (über die p-adische Darstellung der Cantormenge).

Daraufhin sollte ich verschiedene weitere topologische Eigenschaften der Kantormenge aufzählen ($C \approx C \times C$, total unzusammenhängend, überabzählbar (aus Ana III)). Nun sollte ich beweisen, dass C total unzusammenhängend ist (man teilt es als Quotiententopologie in $[0, 1]$).

Dann sind wir zu topologischen Konzepten übergegangen, die in der Funktionentheorie verwendet werden, insb. Homotopie. Hier sollte ich die Definition aufschreiben. Dies tat ich zuerst allgemein, bis ich feststellte, dass Herr Steuding dies nur für geschlossene Wege wollte (Anfangs- und Endpunkte müssen dann auch übereinstimmen).

Nun sind wir zur Funktionentheorie übergegangen.

Wo haben wir die Homotopie in der Funktionentheorie verwendet?
Homotop $\Rightarrow$ Homolog. Insbesondere habe ich den Cauchyschen Satz für einfach zusammenhängende Gebiete zitiert.

Daraufhin sollte ich den zentralen Satz erwähnen, in dem wir nur nullhomologe Wege gefordert haben. Folgt einer aus dem Anderen?

Ja, Gegenbeispiel (aus Skript), dass Umkehrung nicht gilt.

Daraufhin sollte ich alle Voraussetzungen des Globalen Satz von Cauchy aufzählen (Ω offen, f holomorph). Dann sind wir zum Residuensatz und Argumentprinzip übergegangen, also dazu was passiert, wenn isolierte Singularitäten auftreten. Auch hier wollte Herr Steuding alle Voraussetzungen wissen (ich hatte vergessen, dass keine Polstelle auf dem Bild des Weges liegen darf).

Anschließend wollte Herr Steuding noch wissen, wie genau die Summe im Residuensatz aussieht (diese ist endlich). Dazu musste ich die Definition der Umlaufzahl hinschreiben und sollte auch beweisen, warum diese in $\mathbb{Z}$ liegt. Darauf war ich nicht vorbereitet. Herr Steuding war aber mit meiner sehr groben Skizze zufrieden. Außerdem sollte ich zeigen, dass die Umlaufzahl auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente Null ist (folgt aus trivialer Abschätzung).

Daraufhin fragte Herr Steuding, wo wir den Residuensatz verwendet hatten. Ich nannte, dass wir daraus die Partialbruchzerlegung des $\cot(\pi\omega)$ entwickelt haben. Dazu wollte er auch wissen wie wir dies gemacht haben (Residuensatz auf immer größere Kreise von $\frac{\cot(\pi z)}{z-\omega}$ angewendet, ein Residuum liefert den Kotangens andere die Partialbruchzerlegung und das Integral verschwindet). Daraufhin sind wir auf Mittag-Leffler eingegangen und darauf aufbauend auf den Weierstraß'schen Produktsatz (mit Beweisskizze, bzw. wie dies mit Mittag-Leffler zusammenhängt). Anschließend sollte ich die Definition von ganzen Funktionen endlicher Ordnung aufschreiben und die Produktzerlegung im Hadamard'schen Produktsatz angeben (auch die Formel aufschreiben!). Danach war die Prüfung zu Ende.

Herr Prof. Dr. Steuding ist als Prüfer sehr zu empfehlen stellt aber auch hohe Anforderungen. Die Prüfungssituation ist sehr entspannt, was auch daran liegt, dass man sich das Einstiegsthema selbst wählen und vorbereiten kann. Zu den meisten Sätzen, die man erwähnt, möchte er zumindest eine kurze Beweisskizze hören. Insbesondere bei dem Satz, dass die Umlaufzahl eine ganze Zahl ist, hatte ich dies nicht erwartet.