Skriptum

Funktionentheorie I

Definitionen und Sätze

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

$\mathbb{C}$ ist ein Körper.

Definitionen von Realteil, Imaginärteil, Polarkoordinaten, Einheitswurzeln, Umgebung, offen, Häufungspunkt, Cauchyfolge, Vollständigkeit, abgeschlossen, Rand, beschränkt, kompakt, zusammenhängend, Weg, weg-äquivalent, Zusammenhangskomponente.

2 Holomorphe Funktionen

Zusatzdefinition. Definition von *stetig*, *komplex differenzierbar* und *Ableitung von f in z_0*. (Im Gegensatz zum reellen muss der Grenzwert für sehr viele Limiten gelten). Definition von *holomorph.*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Zusatzsatz. *Für holomorphe f gilt $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$. Und nach Trennung von Real und Imaginärteil ergeben sich die* Cauchy-Riemannschen-Diffgleichungen *und die* Differentialoperatoren.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Beweis: Man betrachte verschiedene Limita gegen den Grenzwert (Reelle-Achse, Imaginäre Achse). □

Satz 2.1. *Ist f holomorph in einer Umgebung von z_0, so gilt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ und $f'(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z}(z_0)$.*

Beweis: $f = u + iv$ und dann aus den Cauchy-Riemannschen-Diffgleichungen □

Satz 2.2. *Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv$ komplex mit stetig diffbaren reellwertigen Fkt., die CR genügen, so ist f holomorph und $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$*

Beweis: $f(z + h)$ durch Approximation von u und v (wegen stetig diffbar) liefern im Differenzenquotienten die Beh. □

Satz 2.3. *Eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definiert auf ihrer Konvergenzkreisscheibe eine Holomorphe Funktion und ihre Ableitung ist gegeben durch gliedweise Differentation.*

Beweis: Nur Holomorphie: Aufteilen von f in endliche und unendliche Summe, der Differenzenquotient weicht dann von der Ableitung um weniger als Epsilon ab (Reihenrest einer konvergenten Reihe wird verwendet). □

Zusatzbemerkung. Aus vorherigem Satz erhält man die Holomorphie von e^z, $\sin z$ und $\cos z$ auf ganz $\mathbb{C}$.

Zusatzdefinition. Definition von *analytisch* in Ω. (Potenzreihen sind unendlich oft komplex diffbar).

3 Kurvenintegrale

Zusatzdefinition. Definition einer Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ als *komplex integrierbar.*

Zusatzdefinition. Definition einer parametrisierten Kurve, glatt, stückweise glatt, äquivalenter Kurven, geschlossen, einfach, Kreislinie, positive Orientierung, negative Orientierung, Kurvenintegral, Bogenlänge

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\, dt, \quad l(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|\, dt$$

(Wohldefiniert da äquivalente Kurven einer Substitution entsprechen)

Satz 3.1. *Kurvenintegrale erfüllen die Linearität, Orientierungsumkehrung und die triviale Abschätzung.*

$$\left|\int_\gamma f(z)\ dz\right| \leq ||f||_\gamma \cdot l(\gamma)$$

Zusatzdefinition. Definition der Stammfunktion.

Satz 3.2. *Ist f in Ω stetig mit Stammfunktion so kann man das Integral über eine Kurve über die Stammfunktion berechnen.*

$$\int_\gamma f(z) = F(\omega_2) - F(\omega_1)$$

Beweis: Man wählt eine Parametrisierung, die Kettenregel und den HS der Diff- und Integralrechnung. □

Korollar 3.3. *Besitzt eine stetige Funktion auf Ω eine Stammfunktion so ist das Integral über jede geschlossene Kurve gleich Null.*

Zusatzdefinition. Definition der Orthogonalitätsrelation und Berechnung dieser.

$$\int_C x^n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Korollar 3.4. *Sei Ω ein Gebiet und f holomorph mit $f' \equiv 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis: Jedes Kreisintegral verschwindet also ist f als Stammfunktion konstant. □

4 Der Cauchysche Integralsatz

Satz 4.1. *(Goursat) Ist Ω offen und $\Delta \subset \Omega$ ein Dreieck, dessen Inneres ganz in Ω enthalten ist, sowie f holomorph, so ist: $\int_\Delta f(z)dz = 0$.*

Beweis: Zerlegung des Dreiecks in 4 ähnliche. Orientierung so, dass die Verbindungsstrecken verschwinden. Immer Integral abschätzen durch 4-Mal größtes. Bei der Iteration der geschachtelten Dreiecke halbiert sich der Umfang und Durchmesser. Wegen Vollständigkeit gibt es einen Punkt in allen abgeschlossenen Dreiecken. Lineare Approximation von f: $f(z) = f(\omega) + f'(\omega)(z-\omega) + \epsilon(z)(z-\omega)$. Einer Teil besitzt Stammfunktion anderer lässt sich durch Triviale Abschätzung und abnehmenden Umfang und Durchmesser abschätzen. □

Korollar 4.2. *Analoger Satz für Vierecke.*

Satz 4.3. *Eine in einer offenen Kreisscheibe holomorphe Funktion besitzt eine Stammfunktion.*

BEWEIS: Wähle γ_z als Polygonzug entlang Reeller und Imaginärer Achse und definiere $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\omega) d\omega$. Die Differenz entspricht nach vorherigen beiden Sätzen genau dem weg von $F(z)$ nach $F(z+h)$. Lineare Approximierbarkeit ($f(\omega) = f(z) + \epsilon(\omega)$) liefert einerseits $hf(z)$ und einen nach der trivialen Abschätzung vernachlässigbaren Term. $\square$

Satz 4.4. *(Cauchy'scher Integralsatz für Kreisscheiben) Ist f holomorph in einer Kreisscheibe, so gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jede geschlossene Kurve γ in dieser.*

BEWEIS: Sie besitzt eine Stammfunktion, folglich ist das Integral Null. $\square$

Korollar 4.5. *Ist f holomorph in einer offenen Menge Ω, die einen Kreis C und sein Inneres enthält, so gilt $\int_C f(z)dz = 0$*

5 Die Cauchy'schen Integralformeln

Satz 5.1. *(Cauchy) Sei D eine offene Kreisscheibe mit Rand C sowie die abgeschlossene Kreisscheibe enthalten in einer offenen Menge Ω und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

BEWEIS: Man betrachte einen speziellen Integrationsweg $\Gamma_{\delta,\epsilon}$ und Integriere $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Das Integral über $\Gamma_{\delta,\epsilon}$ insgesamt ist Null, da dort holomorph. Für $\delta \to 0$ fallen die Geradensegmente weg. Für den kleinen Kreis verwende man $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \frac{f(z)}{\zeta - z}$. Mit der Holomorphie ist der erste Term beschränkt also nach der Trivialen Abschätzung des Integral Null. Das Zweite liefert den Wert (Orthogonalitätsrelation). $\square$

Satz 5.2. *(Cauchysche Integralformeln) Sei Ω offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

BEWEIS: Induktion $\square$

Satz 5.3. *(Cauchysche Ungleichung) Sei Ω offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, und D Kreisscheibe mit Radius R und Rand C, dann gilt:*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! ||f||_C}{R^n}$$

BEWEIS: Parametrisierung des Wegs der Cauchyschen Integralformeln und triviale Abschätzung. $\square$

Satz 5.4. *(Liouville) Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

BEWEIS: $f'(z_0)$ wird nach vorherigem Satz beliebig klein für beliebig große $R \Rightarrow f$ konstant. □

Korollar 5.5. *(Fundamentalsatz der Algebra) Jedes nicht konstante Polynom in $\mathbb{C}$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

BEWEIS: Falls keine Nullstelle, so ist $1/P(z)$ beschränkt. Für große z wegen $|P(z)| \geq c|z|^n$ und für die übrige Kompakte Menge auch. □

6 Lokal gleichmäßige Konvergenz

Satz 6.1. *(Weierstraß) Sei Ω offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist D eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 mit Abschluss in Ω. Dann besitzt f eine in D konvergente Potenzreihenentwicklung $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$*

BEWEIS: Geometrische Reihe (gleichmäßig Konvergent) angewandt auf Cauchysche Integralformel. Integrations- und Summenvertauschung liefert Ergebnis. □

Zusatzbemerkung. Ist f eine ganze Funktion, so besitzt f eine in ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihenentwicklung.

$$\text{lok. Stammfunktion} \Leftrightarrow \text{CR-Dgl} \Leftrightarrow \text{holomorph} \Leftrightarrow \text{analytisch}$$

Satz 6.2. *(Morera) Angenommen f ist stetig in der offenen Kreisscheibe D und für jedes Dreieck gilt $\int_\Delta f(z)dz = 0$, so ist f holomorph in D.*

BEWEIS: f besitzt eine Stammfunktion, die nach dem vorherigen Satz unendlich oft diffbar ist. Also auch $f = F'$. □

Zusatzdefinition. Definition von *lokal gleichmäßiger Konvergenz bei Funktionenfolgen* (aus einem Satz von Heine-Borell)

Satz 6.3. *(Satz von Weierstraß) Sei Ω offen und $f_1, f_n, \cdots : \Omega \to \mathbb{C}$ eine lokal glm. konvergente Folge holomorpher Funktionen. Dann ist auch die Grenzfunktion f holomorph und die Folge der Ableitungen (f_n') konvergiert lokal glm. gegen f'.*

BEWEIS: Nach dem Satz von Goursat verschwindet das Integral über Δ für alle f_i also auch für f und nach Morera ist f holomorph. Zweiter Teil folgt aus den Cauchyschen Integralformeln wenn man $f'(z) - f_n'(z)$ abschätzt. □

Zusatzbemerkung. Das Analogon für reelle Differenzierbarkeit ist falsch.

Zusatzdefinition. Definition von *normal konvergent.*

Zusatzbemerkung. Aus normaler Konvergenz folgt die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz.

Korollar 6.4. *(Majorantentest) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine normal konvergente Reihe holomorpher Funktionen. Dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls holomorph in Ω und es gilt $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.*

Zusatzbemerkung. Sei $s = \sigma + it$. Wegen $|n^s| = n^\sigma$. ist die Riemann'sche Zetafunktion auf $\{s \in \mathbb{C} | Re(s) = \sigma > 1\}$ normal konvergent und definiert also eine holomorphe Funktion.

Satz 6.5. *Sei $F(z,s)$ definiert für $(z,s) \in \Omega \times [0,1]$, wobei Ω offen ist. Gilt $F(z,s)$ ist holomorph in z für jedes $s \in [0,1]$ und ist $F(z,s)$ stetig in $\Omega \times [0,1]$, dann ist die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$*

$$f(z) = \int_0^1 F(z,s) ds$$

holomorph in Ω.

Beweis: Man zeigt nur Morera. Approximation von f durch Riemannsummen, für diese ist Morera erfüllt, da es holomorphe Funktionen sind. Ergebnis folgt aus Weiserstraß, da Riemannsummen lokal gleichmäßig gegen f konvergieren. □

Zusatzbemerkung. Die Gammafunktion $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ ist holomorph für $Rez > 0$.

Beweis: $\int_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} \ldots dt$ ist selbst holomorph und konvergiert lokal gleichmäßig gegen Γ. □

7 Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

Satz 7.1. *(Identitätssatz) Sei Ω ein Gebiet und $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

- *$f \equiv g$*
- *Die Menge $\{f(z) = g(z)\}$ besitzt einen Häufungspunkt in Ω*
- *Es gibt ein z_0 mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$.*

Beweis: Es genügt $g \equiv 0$ anzunehmen. f lässt sich als Potenzreihe darstellen. In jeder Umgebung gibt es einen Wert mit 0 nach der Stetigkeit folgt $a_0 = 0$ weiter mit $g(z) := \frac{f(z)}{z - z_0}$ liefert $a_1 = 0$. Also gilt $f \equiv 0$ in einer offenen Umgebung um z_0, da Ω zusammenhängen ist folgt die Behauptung, da $\{x \in \mathbb{C} | f(x) = 0\}$ offen und abgeschlossen ist. □

Satz 7.2. *Sind f^+ auf Ω^+ und f^- auf Ω^- holomorphe Funktionen, die sich nach I fortsetzten lassen mit $f^+(x) = f^-(x)$, so ist die Kombination holomorph auf Ω.*

Beweis: f ist stetig. Betrachte $\Delta \subset \Omega$. Ist $\Delta \cap I = \emptyset$ so folgt $\int_\Delta f(z)dz = 0$ und f ist holomorph. Falls eine Kante von Δ I berührt so folgt über die Stetigkeit und das Verschwinden für alle verschobenen Dreiecke, dass das Integral null ist. Falls das Dreieck I schneidet zerlegt man es in obige Fälle. □

Satz 7.3. *(Schwarz'sches Spieglungsprinzip) Ist f holomorph in Ω^+ und besitzt es eine stetige Fortsetzung nach I mit reellen Funktionswerten auf I, so gibt es eine Fortsetzung F auf Ω*

Beweis: Setzte f fort auf Ω^- durch $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Verwende die Potenzreihenentwicklung von f um Potenzreihe von F zu berechnen $\Rightarrow F$ analytisch und somit holomorph. □

Satz 7.4. *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung von $\overline{D_r(z_0)}$ holomorph. Wenn gilt $|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|$, so besitzt f eine Nullstelle in $D_r(z_0)$.*

Beweis: Falls es keine Nullstelle Besitzt ist $1/f(z)$ holomorph und man findet einen Widerspruch zur Cauchyschen Ungleichung mit $\partial D_r(z_0)$ mit der trivialen Abschätzung.

□

Satz 7.5. *(Satz von der Gebietstreue) Sei f eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet Ω. Dann ist das Bild $f(\Omega)$ wieder ein Gebiet oder besteht aus einem Punkt, letzteres genau dann, wenn f konstant ist.*

Beweis: Sei $\omega_0 \in f(\Omega)$. Nach dem Identitätssatz gibt es eine Abgeschlossene Kreisscheibe von z_0, die kein weiteres Urbild von ω_0 enthält. Nach einigen Abschätzungen folgt aus dem vorherigen Satz die Existenz eines weiteren $z' \in D_r(z_0) \subset \Omega$ mit $f(z')$ in der Nähe von Omega, also enthält $f(\Omega)$ eine Umgebung $U_\epsilon(\omega_0)$. □

Zusatzbemerkung. Das reelle Analogon ist falsch.

Satz 7.6. *(Maximumsprinzip) Sei Ω ein Gebiet. Hat $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ein lokales Betragsmaximum in z_0, so ist f konstant.*

Beweis: Sei U eine Umgebung von z_0. Dann ist $f(U)$ keine Umgebung von $f(z_0)$ also f auf U konstant. Dann Identitätssatz. □

Zusatzbemerkung. Ist Ω beschränkt und f auf dem Abschluss noch stetig, so nimmt $|f(z)|$ das Maximum auf dem Rand an. Weiter liefert das Maximumprinzip für $1/f$ das Minimumprinzip (konstant oder es besitzt eine Nullstelle in z_0).

8 Isolierte Singularitäten

Zusatzdefinition. Definition von *gelochte Kreisscheibe*, *isolierte Singularität* und *hebbar.*

Satz 8.1. *(Riemannsche Hebbarkeitssatz) Sei Ω offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine isolierte Singularität ist genau dann hebbar, wenn es eine punktierte Umgebung um diese gibt, in der f beschränkt ist. Äquivalent* $\lim_{z\to\zeta} f(z)(z-\zeta) = 0$.

BEWEIS: Eine Richtung klar. Sei nun o.B.d.A. $\zeta = 0$ betrachte $g(z) = z^2 f(z)$ falls $z \neq 0$ oder 0 sonst. g ist diffbar, da Diffquotient existiert. Also ist g holomorph und besitzt Potenzreihe. a_0 und a_1 sind 0. Also auch $f(z) = g(z)/x^2$ holomorph. □

Zusatzdefinition. Definition von *Ordnung der Nullstelle*, *Pol* und *Ordnung des Pols.* ($\min_k (z-\zeta)^k f(z)$ beschränkt)

Satz 8.2. *Es sei f holomorph in der punktierten Kreisscheibe, dann sind äquivalent:*

- *f hat einen Pol der Ordnung n*
- *Es gibt eine in der Kreisscheibe holomorphe Funktion g mit $g(\zeta) \neq 0$, so dass $f(z) = \frac{g(z)}{(z-\zeta)^n}$*
- *Es gibt eine offene Umgebung und eine nullstellenfrei Funktion h mit einer Nullstelle n-ter Ordnung in ζ, so dass $f = \frac{1}{h}$ in $U \backslash \{\zeta\}$.*
- *Das Wachstumsverhalten von $|f(z)|$ dort ist wie $|z-\zeta|^{-n}$.*

BEWEIS: Aus Definition von Pol und damit verbundener Beschränktheit folgt 2. aus 1. mit dem Hebbarkeitssatz. Rest ziemlich klar. □

Korollar 8.3. *Eine in einer gelochten Kreisscheibe holomorphe Funktion besitzt genau dann einen Pol in ζ, wenn $\lim_{z\to\zeta} = \infty$.*

Zusatzbemerkung. Die Funktion wächst also quasi bei einem Pol gleichmäßig gegen ∞.

Zusatzdefinition. Definition von *meromorph*, *Körper der meromorphen Funktionen* und *wesentliche Singularität.*

Zusatzbeispiel.

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

Satz 8.4. *(Casorati-Weierstraß) Es sei Ω offen sowie $f : \Omega\backslash\{\zeta\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

- *ζ ist eine wesentliche Singularität*
- *Das Bild jeder punktierten Umgebung von ζ liegt dicht in $\mathbb{C}$*
- *Es gibt Folgen nach ζ, so dass die Bildfolgen in $\hat{\mathbb{C}}$ keinen Limes besitzen.*

BEWEIS: Falls das Bild nicht dicht liegt gibt es $f(\dot{D}_\epsilon(\zeta)) \cap \overline{D_r(c)} = \emptyset$. Also ist $g(z) := \frac{1}{f(z)-c}$ holomorph in $\dot{D}_\epsilon(\zeta)$ und beschränkt gegen $\frac{1}{r}$. Nach dem Hebbarkeitssatz ist ζ hebbar in g und demnach besitzt f keine wesentliche Singularität (auflösen). □

9 Der globale Satz von Cauchy

Zusatzdefinition. Definition von *Umlaufzahl*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-\omega}$$

Satz 9.1. *Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $\Omega = \mathbb{C}\backslash Bild\ \gamma$. Dann ist $\omega \mapsto n(\gamma,\omega)$ eine ganzzahlige Fkt., die in jeder Zusammenhangskomponente konstant und auf der Unbeschränkten gleich Null ist.*

Beweis: Es gibt nur eine Unbeschränkte, da Bild γ kompakt ist. Es ist genau dann $\frac{z}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$, wenn $e^Z = 1$ ist. Definition einer Abbildung ϕ, die auf jeder Zusammenhangskomponente konstant Eins ist. Damit ist die Umlaufzahl in $\mathbb{Z}$. □

Zusatzdefinition. Definition von *Kette*, *Träger (Spur) einer Kette*, *geschlossen*, *Zyklus*, *Umlaufzahl einer Kette*, *nullhomolog in* Ω, *homolog in* Ω

Satz 9.2. *(Globaler Cauchy'scher Integralsatz und Integralformeln) Sei Ω offen und Γ eine nullhomologe Kette in Ω, sowie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten*

- $\int_\Gamma f(z)dz = 0$
- *Für jeden Punkt $\zeta \in \Omega\backslash Tr(\Gamma)$ ist $n(\Gamma,\zeta)f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}}$.*

Beweis: 1. folgt aus 2. lang □

Korollar 9.3. *Seien Γ und Γ' homologe Ketten in einer offenen Menge Ω und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma'} f(z)dz$$

Korollar 9.4. *Sei Ω offen und die Kette Γ nullhomolog in Ω. Ferner seien $\zeta_1, \ldots \zeta_m \in \Omega$ verschieden und γ_i jeweils der Rand einer Kreisscheibe um ζ_i und $\Gamma \sim \sum_{j=1}^m n(\Gamma,\zeta_j)\gamma_j$ in $\Omega\backslash\{\zeta_1,\ldots,\zeta_m\}$, so gilt:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^m n(\Gamma,\zeta_j)\int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Zusatzdefinition. Definition der Homotopie zweier Wege (geschlossener Wege).

Satz 9.5. *Seien γ_0 und γ_1 geschlossene Wege. Sind γ_0 und γ_1 homotop in Ω, so sind sie auch homolog in Ω.*

Beweis: Die Homotopie ist gleichmäßig stetig. Approximation der Wege durch Polygonzüge. Dann ausrechnen der Umlaufzahlen. □

Zusatzdefinition. Definition von *einfach zusammenhängend.*

Korollar 9.6. *(Cauchysche Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete) Es sei Ω einfach zusammenhängen. Dann ist jede geschlossene Kette Γ in Ω nullhomolog und für jede in Ω holomorphe Funktion f gilt $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

Zusatzbemerkung. Ω ist einfach zusammenhängen $\Leftrightarrow$ jeder geschlossene Weg / Kette ist nullhomolog $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\backslash\Omega$ besitzt keine beschränkte Zusammenhangskomponente $\Leftrightarrow$ $\hat{C}\backslash\Omega$ ist zusammenhängend (stereographische Projektion) $\Leftrightarrow$ Mit jedem geschlossenen Weg γ in Ω ist auch das Innere von γ ganz in Ω enthalten $\Leftrightarrow$ Jede in Ω holomorphe Funktion besitzt eine Stammfunktion $\Leftrightarrow$ Geschlossener Weg homotop zu einem Punkt.

10 Analytische Fortsetzung und komplexer Logarithmus

Zusatzdefinition. Fortsetzung der Zetafunktion auf die rechte Halb-Ebene mit Pol in $s = 1$. Definition von *Kreiskette*, *analytische Fortsetzung längs einer Kreiskette.*

Satz 10.1. *Sei $(K_0, \ldots, K_n)$ eine Kreiskette und f_0 holomorph auf K_0. Besitzt die Ableitung f_0' eine analytische Fortsetzung längs der Kreiskette, so auch f_0 selbst.*

Beweis: Die Ableitungen besitzen Stammfunktionen (da als Potenzreihe darstellbar), diese entsprechen f. $\square$

Beispiel 10.2. Sei $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und K_0 eine offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $z_0 = 1$. Sei $g_0 = \frac{1}{z}$ und f_0 die Stammfunktion mit $f_0(1) = 0$. So lässt sich dieses f (Potenzreihenentwicklung des reellen Logarithmus) auf jeder Kreiskette in $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ analytisch fortsetzen. Es gibt jedoch keine in Ω analytische Fortsetzung vgl. Orthogonalitätsrelation.

Zusatzdefinition. Definition von *Zweig des komplexen Logarithmus*, *Hauptzweig*

Zusatzbemerkung. Die Mehrdeutigkeit des Logarithmus entspricht der 2π-Periodizität seiner Umkehrfunktion (exp). Sie lässt sich mit der *Riemann'schen Fläche* visualisieren. $(\log z = \log|z| + i(arg(z) + 2\pi m))$

Satz 10.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent*

- *Auf Ω existiert ein Zweig des Logarithmus.*
- *$z \mapsto \frac{1}{z}$ besitzt eine Stammfunktion in Ω*
- *Ω ist einfach zusammenhängend.*

Satz 10.4. *(Holomorpher Logarithmus) Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Dann gibt es eine holomorphe Funktion mit $f(z) = \exp(g(z))$.*

Beweis: Es ist $\frac{f'(z)}{f(z)}$ holomorph und da Ω einfach zush. hat es eine Stammfunktion. Aus $(f \cdot e^{-h})'$ folgt es dann. $\square$

Zusatzdefinition. Definition von *logarithmischer Ableitung.*

Zusatzbemerkung. Die Argumentfkt. (Imaginärteil des komp. Log) erlaubt eine neue Interpretation der Umlaufzahl. (Integration von $\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z-0}$).

Zusatzdefinition. Definition von *b-ter Potenz von a* (Werte unterscheiden sich um den Faktor $\exp(2\pi imb)$), *Exponentialfunktion*, *Zweig der b-ten Potenz auf* Ω.

Satz 10.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein Gebiet auf dem ein Zweig des Logarithmus existiert. Ist f eine auf Ω stetige Fkt. mit $(f(z))^n = z$, so stimmt f mit einem der Zweige $\exp(\frac{1}{n}\log z) \cdot \exp(2\pi i\frac{k}{n})$ von $z^{1/n}$ überein.*

Beweis: Sei $\zeta_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ eine n-te Einheitswurzel. Mit $g(z) = \exp(\frac{1}{n}\log z)$ gilt $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^n \equiv 1$, also eine Einheitswurzel. Aus der Diskretheit dieser mit der Stetigkeit von f folgt es. □

Satz 10.6. *(Holomorphe n-te Wurzel) Sei Ω einfach zusammenhängend und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Dann gibt es eine holomorphe Funktion mit $f(z) = g(z)^n$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Aus $f(z) = \exp(h(z)) = (\exp(\frac{1}{n}h(z)))^n$ □

Zusatzbemerkung. Ist Ω einfach zusammenhängend und lässt sich eine Funktion def. auf einer Kreisscheibe längs jeder Kreiskette in Ω fortsetzen, so ist sie die Einschränkung einer eindeutigen holomorphen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$. (Mondromiesatz)

11 Laurent-Reihen

Motivation der Laurentreihen aus der Entwicklung von g um einen Pol $\frac{g(z)}{(z-\zeta)^m}$ und der Exponentialfunktion $\exp(1/z)$.

Zusatzdefinition. Definition von *Ringgebiet.*

Satz 11.1. *(Laurent-Zerlegung) Jede auf einem Ringgebiet holomorphe Funktion besitzt eine eindeutige Zerlegung*

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right),$$

wobei $g : D_R(0) \to \mathbb{C}$ und $h = D_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen sind mit $h(0) = 0$.

Beweis: Eindeutigkeit: Differenz zweier ist wieder Laurent-Reihe, also genügt $f \equiv 0$. Aus $g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ folgt, dass man sie zu einer ganzen Funktion verschmelzen kann. Diese ist für ∞ beschränkt also konstant.
Existenz: Festlegung zweier Kreise im Ringgebiet, die ein z daraus einschließen. Differenz dieser ist nullhomolog, also integrale über eine komische Funktion G (Diffquotient + Ableitung) gleich. Aus den Integralen über die Kreise erhält man g und h. □

Zusatzdefinition. Definition einer *Laurent-Reihe.*

Korollar 11.2. *Sei f auf einem Ringgebiet holomorph. Dann lässt sich f dort als normal konvergente Laurent-Reihe entwickeln:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\omega)^n$$

Die Entwicklung ist eindeutig mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\omega|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\omega)^{n+1}} d\zeta$ und es besteht die Abschätzung $|a_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \max_{|\zeta-\omega|=\rho} |f(\zeta)|$

Korollar 11.3. *Es sei f holomorph in einer punktierten Umgebung mit zugehöriger Laurent-Entwicklung in ω. Dann ist die Singularität ω*

- *hebbar, wenn alle negativen a_n Null sind*
- *ein Pol k-ter Ordnung, wenn $a_{-k} \neq 0$, $a_n = 0$ für alle $n < -k$.*
- *wesentlich, wenn unendlich viele a_n ungleich Null sind.*

Zusatzbemerkung. Entwicklung von periodischen Funktionen durch Transformation ($z \to q := e^{2\pi i z}$) auf Kreisring liefert als Laurent-Reihe die Forier-Reihenentwicklung.

12 Residuenkalkül

Zusatzdefinition. Definition von *Hauptteil*, *Residuum.*

Satz 12.1. *(Residuensatz, Cauchy) Es sei f bis auf isolierte Singularitäten in einem Gebiet Ω eine holomorphe Funktion. Dann gilt für jede nullhomologe geschlossene Kette Γ in Ω, auf deren Spur keine Singularität von f liegt,*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{\omega \in \Omega} n(\Gamma, \omega) Res_\omega f$$

Beweis: (Umlaufzahl nur auf kompakter Menge ungleich Null und nur endlich viele Singularitäten, da diskret $\Rightarrow$ Summe endlich) Man zieht von f die Hauptreihen aller Singularitäten mit Umlaufzahl ungleich Null ab. Integral darüber ist Null, da es dann holomorph ist. Dann $\int_\Gamma f = \int_\Gamma \sum h_k(z)$. Gleichmäßig konvergente Laurent-Reihe erlaubt vertauschung und Orthogonalitätsrelation liefert Ergebnis. □

Korollar 12.2. *Ist Ω einfach zusammenhängend und f in Ω bis auf isolierte Singularitäten holomorph, sowie γ ein geschlossener Weg mit $n(\gamma, \omega_k) = 1$, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} Res_{\omega_k} f$$

Satz 12.3. *Sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole besitzt und der Grad des Nennerpolynoms von R ist um mindestens zwei größer als der des Zählers. Dann existiert das Integral im Lebesqueschen Sinn mit*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\Im \omega > 0} Res_\omega R(z)$$

BEWEIS: Existiert nach majorisierter Konvergenz. Für beliebig großen Radius liegen alle Pole im oberen Halbkreis. Wert folgt aus Resid-Satz, ober Halbkreis hat Wert Null aus trivialer Abschätzung. □

Satz 12.4. *Analoger Satz für* $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\Im\omega>0} Res_\omega(R(z)\cdot e^{iz})$

BEWEIS: Analog, diesmal über Rechtecke statt Halbkreisen. □

Satz 12.5. *(Argumentprinzip) Es sei f meromorph in dem Gebiet Ω und Γ eine nullhomologe Kette, auf deren Träger weder Null- noch Polstellen liegen.*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f}(z)dz = \sum_{\omega NS} n(\Gamma,\omega)\,Ord_\omega f - \sum_{\omega Pol} n(\Gamma,\omega)\,Ord_\omega f$$

BEWEIS: Es ist $f(z) = (z-\omega)^k g(z)$ für eine Pol oder Nullstelle. Es gilt dann $\frac{f'}{f} = \frac{k}{z-\omega} + \frac{g'}{g}$, also ist das Residuum gleich k. (Positiv für Nullstelle, negativ für Pol) □

Zusatzbemerkung. Bei holomorphen Funktionen lassen sich so die Nullstellen (bzw. a-Stellen) zählen. Insbesondere entspricht dies dem Weg $f\circ\gamma(t) = f(\gamma(t))$ um 0 bzw. a.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{\zeta-a}\,d\zeta = n(f\circ\gamma, a)$$

Satz 12.6. *(Satz von Roché) Es sei Ω offen und $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorph. γ sei ein geschlossener nullhomologer Weg und es gelte $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ für alle im Bild von γ. Dann besitzen f und g dieselbe Anzahl an Nullstellen im Innern von γ.*

BEWEIS: Betrachte $f+\lambda(g-f)$. Wegen der Bedingung keine NS auf dem Bild des Weges. Die Anzahl der Nullstellen von h ergibt sich aus dem Argumentprinzip und ist diskret. Also hat die von λ stetig abhängende Funktion keine Auswirkung. □

Satz 12.7. *(Hurwitz) Es sei Ω ein Gebiet und $f_0, f_1, \ldots$ eine Folge holomorpher nullstellenfreier Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen die (holomorphe) Funktion $f:\Omega\to\mathbb{C}$ konvergieren. Dann gilt $f\equiv 0$ oder f besitzt ebenfalls keine Nullstelle.*

BEWEIS: Angen. f hat eine NS. Die Folge der logarith. Ableitungen konvergiert auch gegen die logarith. Ableitungsgrenzfunktion. Nach Argumentprinzip ist das Integral um diese Nullstelle Null für alle Folgenglieder, also auch für f. □

13 Partialbruchzerlegungen

Satz 13.1.

$$\pi\cot(\pi\omega) = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{1}{\omega-m} = \frac{1}{\omega} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\omega}{\omega^2-m^2}$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge, die keine der Polstellen $z = m\in\mathbb{Z}$ enthält.

BEWEIS: Potenzreihenentwicklung bekannt, Berechnung jedes Residuums, Residuensatz für immer größere Kreise. □

Satz 13.2. *(Mittag Leffler) Sei (ω_m) eine Folge komplexer Zahlen, die sich in $\mathbb{C}$ nirgends häuft. Es sei jeweils ein Hauptteil $h_m(z)$ vorgeschrieben. Dann existiert eine meromorphe Funktion f, die genau in den Punkten ω_m Pole besitzt und dort jeweils den Hauptteil h_m aufweist. Gibt es zwei mit dieser Eigenschaft, so ist die Differenz eine ganze Funktion.*

BEWEIS: Wähle folge $r_m < |\omega_m| \to \infty$. Für $|z| < |\omega_m|$ sind die Hauptteile holomorph und besitzen Potenzreihenentwicklungen. Ziehe von diesen den holomorphen Anfangsteil ab (*konvergenzerzeugende Summanden*), sodass $f(z) := \sum_{m=1}^{\infty}(h_m(z) - g_m(z)) = \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon_m < \infty$ gilt. In $D_R(0)$ erfüllt f die Eigenschaften (Aufteilen in zwei Summen nach $r_m > R$ und nicht). □

Zusatzbemerkung. Anwendung von Mittag Leffler liefern Partialbruchzerlegungen von $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ und der Gammafunktion.

14 Ganze Funktionen endlicher Ordnung

Satz 14.1. *(Jensensche Formel) Sei $R > 0$, Ω offen mit $\overline{D_R(0)} \subset \Omega$. Ferner sei f holomorph mit $f(0) \neq 0$, $f(z) \neq 0$ für $|z| = R$. Für die Nullstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$ von f in $D_R(0)$ gilt dann:*

$$\log|f(0)| - \sum_{n=1}^{N} \log \frac{|\zeta_n|}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(R \cdot e^{i\phi})| d\phi$$

BEWEIS: Die Bedingungen und Beweise sind multiplikativ. Zeige es für die Zerlegung $f(z) = \text{holomorph} \cdot (z - \zeta_1) \ldots (z - \zeta_N)$. Für den holomorphen Teil folgt es nach Cauchy. Für $z - \zeta$ gilt es dann auch mit einer Umformung. □

Korollar 14.2. *Unter den Voraussetzungen des vorherigen Satzes folgt für die Anzahl der Nullstellen $M(r)$ in einer Kreisscheibe:*

$$\int_0^R M(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(R \cdot e^{i\phi})| d\phi - \log|f(0)|$$

BEWEIS: $\int_0^R M(r) \frac{dr}{r} = \sum_{n=1}^{N} \log \left|\frac{R}{\zeta_n}\right| = \sum_{n=1}^{N} \int_{|\zeta_n|}^{R} \frac{dr}{r} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^R \eta_n(r) \frac{dr}{r}$. □

Zusatzdefinition. Definition einer ganzen Funktion von *endlicher Ordnung*, *Ordnung*. $|f(z)| \leq A \cdot \exp(B|z|^{\delta})$.

Satz 14.3. *Ist f eine ganze Funktion von endlicher Ordnung $\leq \delta$, so gelten:*

- *Die Anzahl der Nullstellen von f in $|z| \leq r$ genügt der Ungleichung $M(r) \leq C \cdot r^{\delta}$.*
- *Es gilt $\sum_{n=1, \zeta_n \neq 0}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^r} < \infty$ für alle $r > \delta$.*

BEWEIS: 1. Abschätzung des Korrolars mit der trivialen Abschätzung. 2. folgt aus 1. durch abschnittsweise Betrachtung der ζ_n. $\square$

Satz 14.4. *(Eulersche Ergängzungssatz)* $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

BEWEIS: Integraldarstellung von $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z)$ mit Fubini. Dieses berechnet man durch ein Rechteck mittels Residuuensatz. Dies liefert die rechte Seite. $\square$

Korollar 14.5. *Einige Eigenschaften der Gammafunktion. Inklusive* $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *hat die Ordnung* $\delta_r = 1$ *und einfache Nullstellen in* $z = 0, -1, -2 \dots$.

15 Unendliche Produkte

Zusatzdefinition. Definition eines *unendlichen Produkts* und *Konvergenz* eines selbigen.

Satz 15.1. *Das unendliche Produkt* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ *konvergiert genau dann, wenn es ein* M *gibt, so dass* $\alpha_n \notin (-\infty, -1]$ *für alle* $n \geq M$ *und* $\sum_{n=M}^{\infty} \log(1+\alpha_n)$ *konvergiert (Hauptzweig).*

BEWEIS: Falls die Bedingungen gelten so ist es klar. Grenzwert der Produkte $\prod_{n=M}^{N}$ existiert und also Cauchyfolge. Also alle Abschnitte in einem Kreis um 1. $\square$

Zusatzdefinition. Definition eines *absolut konvergenten* Produkts.

Korollar 15.2. *Das unendliche Produkt* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ *konvergiert genau dann absolut, wenn die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *absolut konvergiert.*

BEWEIS: Beidseitiges Abschätzung von $|\log(1+\alpha)|$. $\square$

Zusatzdefinition. Definition von *Produkten von Funktionen* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$, *(punktweise) konvergent, absolut (lokal) gleichmäßig konvergent.*

Satz 15.3. *Sei* Ω *offen und* $f_1, f_n, \dots : \Omega \to \mathbb{C}$ *stetig.t Dann Konvergiert das unendliche Produkt* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ *genau dann absolut lokal gleichmäßig, wenn es zu jedem Kompaktum* $K \subset \Omega$ *ein* N *gibt, so dass* $\sum_{n \geq N} log(1+f_n)$ *auf* K *absolut gleichmäßig konvergent. Sind alle Fkt.* f_n *holomorph so auch die Grenzfunktion.*

BEWEIS: Vorherige Sätze plus Weierstraß. $\square$

Zusatzbemerkung. Gibt es eine Funktion, die in vorgeschriebenen komplexen Zahlen a_n Nullstellen vorgegebener Ordnung besitzt? (im endlichen Klar). Im unendlichen nicht eindeutig und mit Mittag-Leffler verwandt.

Satz 15.4. *Ist* f *eine ganze Funktion mit Nullstellen in* a_n *(kein HP) der Ordnung* k_n, *so ist* $\frac{f'}{f}$ *eine meromorphe Funktion mit Hauptteilen* $\frac{k_n}{z-a_n}$ *in den einfachen Polstellen* $z = a_n$.

BEWEIS: Lokale Darstellung mit ganzer Funktion. Logarithmische Differenzation. $\square$

Satz 15.5. *(Weierstraßscher Produktsatz) Es sei a_n eine Folge ohne Häufungspunkt mit $a_0 = 0$ und k_n eine Folge natürlicher Zahlen (k_0 auch Null). Dann existiert eine ganze Funktion $f(z)$, die genau in den Punkten $z = a_n$ von der Ordnung k_n verschwindet.*

$$f(z) = z^{k_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \underbrace{\exp\left(\sum_{m=1}^{m_n+1} \frac{1}{m} \left(\frac{z}{a_n}\right)^m \right)}_{\textit{Konvergenzerzeugender Faktor}} \right)^{k_n}$$

BEWEIS: Zu den Hauptteilen des vorherigen Satzes gibt es eine meromorphe Funktion nach Mittag-Leffler (m_n so dass Konvergenz erzeugt wird, Geometrische Reihe). Wählt man f so, so ist die Logarithmische Ableitung genau die Funktion aus Mittag-Leffler. $\square$

Satz 15.6. *Produktzerlegung des Sinus ($\sin \pi z = \pi z \cdot \prod \ldots$).*

BEWEIS: Darstellung von $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ ist bekannt (nach Mittag-Leffler). Daraus man mit dem weierstraßschem Produktsatz die Darstellung. $\square$

Korollar 15.7. *Berechnung der Stellen $\zeta(2k)$ der Zeta–Funktion über Koeffizientenvergleich und $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$.*

Satz 15.8. *(Hadamard'scher Produktsatz) Sei f eine ganze Funktion endlicher Ordnung δ und k die Ordnung der Nullstelle von f in Null. Ferner seinen a_n die Nullstellen von f. Dann gilt:*

$$f(z) = z^k \cdot \exp(P(z)) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left(Q\left(\frac{z}{a_n}\right)\right)$$

mit $Q(\omega) = \sum_{m=1}^{[\delta]} \frac{\omega^m}{m}$ und $P(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq [\delta]$.

BEWEIS: (lang) $\square$

Korollar 15.9. $\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\lambda z} \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot \exp\left(-\frac{z}{n}\right)$*, mit der Euler-Konstante.*