Skriptum
Konstruierbare Zahlen
Projekttage Mathematik 2007

1 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Gegeben sei eine Menge M von Punkten in der Zeichenebene. Dann sein $C(M)$ die Menge aller Kreise deren Mittelpunkt in M liegt und deren Radius dem Abstand zweier Punkte aus M entspricht. Weiter sei $S(M)$ die Menge aller Geraden, die durch zwei verschiedene Punkte aus M verlaufen.

Nun seien die Zahlen 0 und 1 der reellen Zahlengerade gegeben. Diese betrachten wir nun als Punktmenge M_0 der Zeichenebene. Wir definieren uns nun rekursiv eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen: Aus M_{n-1} ($n \in \mathbb{N}$) gewinnen wird die Menge M_n, indem wir die folgenden Operationen durchführen:

1. Für je zwei verschiedenen Geraden aus $S(M_{n-1})$, die sich schneiden, bilden wir den Schnittpunkt.

2. Für je eine Gerade aus $S(M_{n-1})$ und einem Kreis aus $C(M_{n-1})$, die sich schneiden, bilden wir die Schnittpunkte.

3. Für je zwei verschiedenen Kreise aus $C(M_{n-1})$, die sich schneiden, bilden wir die Schnittpunkte.

2 Konstruierbare Zahlen

Wir nennen eine Zahl auf der reellen Zahlengerade konstruierbar, wenn sie auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 liegt, der durch einen Punkt aus einer Menge M_n verläuft.

Satz 2.1 *Eine Zahl ist genau dann konstruierbar, wenn sie als Term mit rationalen Zahlen, Summen, Produkten, Quotienten und Quadratwurzeln geschrieben werden kann.*

Beweis:

1. Wir zeigen zunächst, dass eine konstruierbare Zahl als Term mit rationalen Zahlen, Summen, Produkten und Quadratwurzeln geschrieben werden kann. Dazu weisen wir nach, dass die Koordinaten aller Punkte aus jeder Menge M_n Terme der geforderten Art sind. Dies genügt, da die zu (x, y) gehörende Zahl entweder $-\sqrt{x^2+y^2}$ oder $+\sqrt{x^2+y^2}$ ist.
   Nun wenden wir eine vollständige Induktion über die Anzahl der Konstruktionsschritte an. Für M_0 ist die Aussage klar. Seien nun die Koordinaten aller Punkte aus M_{n-1} der geforderten Art. Um von M_{n-1} auf M_n zu gelangen, schneidet man Geraden $s_1, s_2 \in S(M_{n-1})$ und Kreise $c_1, c_2 \in C(M_{n-1})$.
   Dabei gilt:
$$\begin{aligned}
(x,y) \in s_1 &\quad\Leftrightarrow\quad y = a_1x + b_1 \\
(x,y) \in s_2 &\quad\Leftrightarrow\quad y = a_2x + b_2 \\
(x,y) \in c_1 &\quad\Leftrightarrow\quad x^2 + y^2 + 2\alpha_1 x + 2\beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\
(x,y) \in c_2 &\quad\Leftrightarrow\quad x^2 + y^2 + 2\alpha_2 x + 2\beta_2 y + \gamma_2 = 0
\end{aligned}$$

worin $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ Terme der geforderten Art sind und $a_1 \neq a_2$ sowie $\alpha_1 \neq \alpha_2$ oder $\beta_1 \neq \beta_2$ gilt. Letzteres gilt, da sonst keine Schnittpunkte existieren.

- ▶ $(\bar{x}, \bar{y}) \in s_1$ und $(\bar{x}, \bar{y}) \in s_2$
  Man erhält $a_1\bar{x} + b_1 = a_2\bar{x} + b_2$ und daraus $\bar{x} = (b_2 - b_1)/(a_1 - a_2)$. Wegen $\bar{y} = a_1\bar{x} + b_1$ folgt die Behauptung.

- ▶ $(\bar{x}, \bar{y}) \in s_1$ und $(\bar{x}, \bar{y}) \in c_1$
  Man erhält $\bar{x}^2 + (a_1\bar{x} + b_1)^2 + 2\alpha_1\bar{x} + 2\beta_1(a_1\bar{x} + b_1) + \gamma = 0$. Da also $\bar{x}$ Lösung einer quadratischen Gleichung ist, in der nur Koeffizienten der geforderten Art auftreten, folgt die Behauptung mit $\bar{y} = a_1\bar{x} + b_1$.

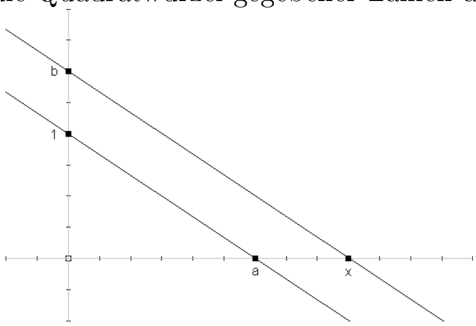
- ▶ $(\bar{x}, \bar{y}) \in c_1$ und $(\bar{x}, \bar{y}) \in c_2$
  Man erhält $2(\alpha_1 - \alpha_2)\bar{x} + 2(\beta_1 - \beta_2)\bar{y} + \gamma_1 - \gamma_2 = 0$ und etwa $\alpha_1 \neq \alpha_2$ führt zu $\bar{x} = (\gamma_2 - \gamma_1 + 2(\beta_2 - \beta_1)\bar{y})/(2(\alpha_1 - \alpha_2))$. Setzt man diesen Ausdruck in $(\bar{x}, \bar{y}) \in c_1$ ein, so erhält man wieder eine quadratische Gleichung mit Koeffizienten der geforderten Art. Insgesamt folgt die Behauptung.

2. Wir zeigen, dass man mit Zirkel und Lineal alle natürlichen Zahlen konstruieren kann. Dann geben wir Methoden an, um aus bereits konstruierten Zahlen deren Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Quadratwurzeln zu konstruieren.

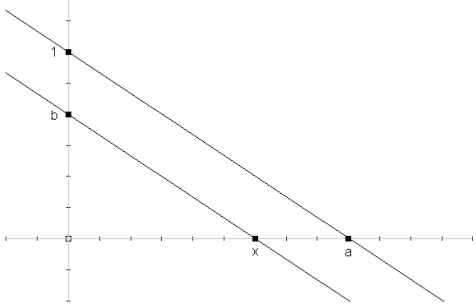
- ▶ Da die Zahlen 0 und 1 gegeben sind, ist die Konstruktion jeder natürlichen Zahl trivial

- ▶ Summen und Differenzen von gegeben Zahlen sind ebenfalls triviale Konstruktionen

- ▶ Im Folgenden geben wir Konstruktionen für das Produkt, den Quotienten und die Quadratwurzel gegebener Zahlen an

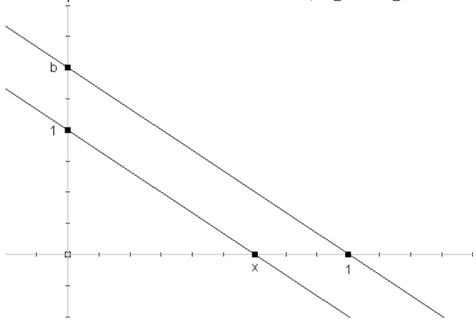


$b > 1, x = a \cdot b$ (zentrische Streckung)

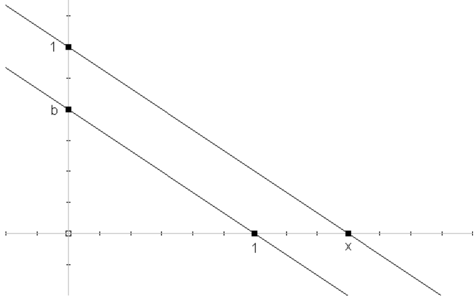


$b < 1, x = a \cdot b$ (zentrische Streckung)

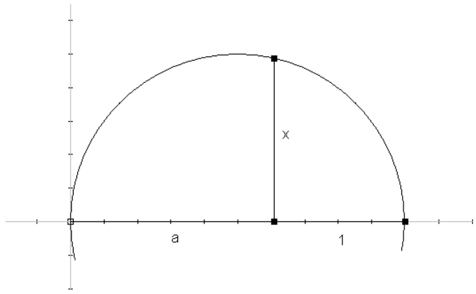
Um a/b zu konstruieren, genügt es eine Konstruktion für $1/b$ anzugeben.



$b > 1, x = 1 \cdot b$ (zentrische Streckung)



$b < 1, x = 1 \cdot b$ (zentrische Streckung)



$x^2 = a$ (Thaleskreis)

□

3 Unmöglichkeitsbeweise

Satz 3.1 *$\sqrt[3]{2}$ ist keine rationale Zahl.*

Beweis: Angenommen es ist $\sqrt[3]{2} = m/n$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, wobei m und n ohne Einschränkung teilerfremd sind. Dann gilt $n^3 \cdot 2 = m^3$. Da 2 eine Primzahl ist, erhält man, dass 2 ein Teiler von m ist. Es gilt also $m = 2l$ und daher $n^3 = 4l^3$, d.h. 2 ist auch ein Teiler von n. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass m und n teilerfremd sind.

□

Im Folgenden betrachten wir die Mengen K_n. Diese seien definiert durch $K_0 = \mathbb{Q}$ und $K_n = \{a + b\sqrt{w} : a, b, w \in K_{n-1}, w > 0, \sqrt{w} \notin K_{n-1}\}$.

Satz 3.2 *Die Mengen K_n sind abgeschlossen gegen Summen-, Differenzen-, Produkt- und Quotientenbildung.*

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion. Die Behauptung ist für K_0 klar. Sei die Aussage für K_n wahr. Dann folgt

- $(a + b\sqrt{w}) + (c + d\sqrt{w}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{w}$
- $(a + b\sqrt{w}) \cdot (c + d\sqrt{w}) = (ac + bdw) + (ad + bc)\sqrt{w}$
- $(a + b\sqrt{w}) - (c + d\sqrt{w}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{w}$
- $\frac{a+b\sqrt{w}}{c+d\sqrt{w}} = \frac{(a+b\sqrt{w})(c-d\sqrt{w})}{c^2+d^2w} = \frac{(ac-bdw)+(bc-ad)\sqrt{w}}{c^2+d^2w} = \frac{ac-bdw}{c^2+d^2w} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2w}\sqrt{w}$

und die Induktionsannahme liefert aus $a, b, c, d \in K_n$ die Behauptung für K_{n+1}.

□

Der zweite Abschnitt besagt, dass es für jede konstruierbare Zahl z eine Menge K_n mit $z \in K_n$ gibt. Für jede konstruierbare Zahl $z \notin \mathbb{Q}$ existiert insbesondere ein n mit $z \notin K_{n-1}$ und $z \in K_n$.

Satz 3.3 *$\sqrt[3]{2}$ ist nicht konstruierbar.*

Beweis: Wir nehmen an, dass $\sqrt[3]{2}$ konstruierbar ist. Wegen $\sqrt[3]{2}$ gibt es eine Folge (K_n) mit $\sqrt[3]{2} \notin K_{n-1}$ und $\sqrt[3]{2} \in K_n$. Es ist $\sqrt[3]{2} = a+b\sqrt{w}$ mit $a, b, w \in K_{n-1}$ und $\sqrt{w} \notin K_{n-1}$. Dann folgt

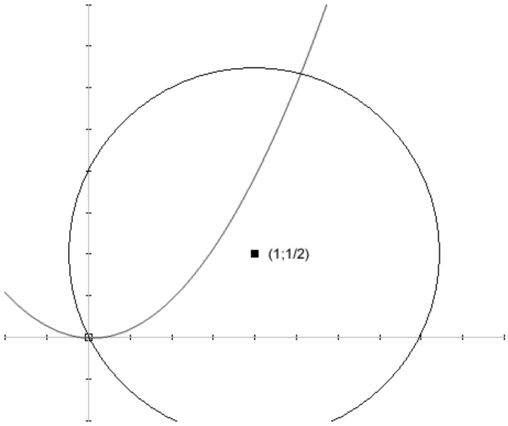
- $(a + b\sqrt{w})^3 - 2 = a^3 + 3a^2b\sqrt{w} + 3ab^2w + b^3w\sqrt{w} - 2 = c + d\sqrt{w}$
- $(a - b\sqrt{w})^3 - 2 = a^3 - 3a^2b\sqrt{w} + 3ab^2w - b^3w\sqrt{w} - 2 = c - d\sqrt{w}$

mit $c = a^3 + 3ab^2w - 2 \in K_{n-1}$ und $d = 3a^2b + b^3w \in K_{n-1}$.
Wegen $a+b\sqrt{w} = \sqrt[3]{2}$ folgt $c+d\sqrt{w} = 0$. Die Annahme $d \neq 0$ liefert $\sqrt{w} = -c/d \in K_{n-1}$ – ein Widerspruch. Daher gilt $d = 0$ und damit auch $c = 0$. Es folgt $(a - b\sqrt{w})^3 - 2 = c - d\sqrt{w} = 0$.
Die Annahme $a - b\sqrt{w} = a + b\sqrt{w}$ liefert $b\sqrt{w} = 0$ und damit $b = 0$. Dies bedeutet aber $\sqrt[3]{2} \in K_{n-1}$, ein Widerspruch. Daher sind $a-b\sqrt{w}$ und $a+b\sqrt{w}$ verschiedene Nullstellen der Gleichung $x^3 - 2 = 0$
Die Gleichung $x^3-2 = 0$ ist äquivalent zu $(x-\sqrt[3]{2})\cdot(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}) = 0$. Da $a-b\sqrt{w} \neq \sqrt[3]{2}$ gilt, ist $a - b\sqrt{w}$ eine Nullstelle von $x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}$. Dies kann aber nicht sein, denn es ist $x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4} = \left(x + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2} > 0$ (für $x \in \mathbb{R}$). □

4 Quasikonstruktionen

Satz 4.1 *$\sqrt[3]{2}$ ist mit Hilfe einer Parabel konstruierbar.*

Beweis:



Man konstruiert einen Kreis mit Mittelpunkt $(1, 1/2)$, der duch 0 geht. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Parabel genügen den Gleichungen $y = x^2$ und $(x-1)^2+(y-1/2)^2 = 5/4$. Es gilt also $x^2 - 2x + 1 + x^4 - x^2 + 1/4 = 5/4$ und daher $x^4 = 2x$. Folglich besitzen die Schnittpunkte die Koordinaten $(0, 0)$ und $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. $\square$

5 Abzählbarkeit

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie endlich ist oder zwischen ihr un den natürlichen Zahlen eine Bijektion besteht.

Satz 5.1 *Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*

Beweis: Wir definieren $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = -1$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = -2, \ldots$ und $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ durch folgendes Schema

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
\frac{m}{n} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \ldots \\
\hline
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1 & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & \ldots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
2 & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \ldots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
3 & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \ldots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
4 & \frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & \ldots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

sowie die Hinzunahme der Null und dem analogen Schema für negative Zahlen, wobei man bereits gezählte Elemente aus $\mathbb{Q}$ auslässt. $\square$

Satz 5.2 *Die Menge* $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis: Wir zeigen, dass die Menge $[0,1] \subset \mathbb{R}$ nicht abzählbar ist. Jede reelle Zahl besitzt eine eindeutige Dezimaldarstellung. Die Annahme, dass $[0,1]$ abzählbar ist, liefert, dass die Folge

$$\begin{array}{l} 0,\ a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\ \cdots \\ 0,\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\ \cdots \\ 0,\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\ \cdots \end{array}$$

usw. mit $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ alle Zahlen aus $[0,1]$ ausschöpft. Die Zahl $0, b_1\, b_2\, b_3 \cdots$ mit $b_i \neq a_{ii}$ ist aus $[0,1]$, aber nicht Teil der Folge – ein Widerspruch. □

Satz 5.3 *Keine Quasikonstruktion erzeugt* $\mathbb{R}$.

Beweis: Man gebe sich die Menge $\{0,1\}$ und endlich viele geometrische Objektklassen, die durch endlich viele Punkte bestimmt sind, vor. Die Folge (M_n), wobei $M_0 = \{0,1\}$ ist und M_n aus M_{n-1} hervorgeht, indem man die Schnittpunkte der durch M_{n-1} definierten Objekte aus obigen Klassen bildet, besteht aus endlichen Mengen. Die Vereinigung $\bigcup M_n$ ist daher abzählbar und somit nicht mit $\mathbb{R}$ identisch. □