Lemma 3.1.2

www.schlurcher.de.vu

Lemma 1. *Es gilt:*

$$\sum_{t=1}^{n} \cos(2\pi\lambda t) = \begin{cases} n, & \textit{für } \lambda \in \mathbb{Z} \\ \cos(\pi\lambda(n+1))\frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)}, & \textit{für } \lambda \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^{n} \sin(2\pi\lambda t) = \begin{cases} 0, & \textit{für } \lambda \in \mathbb{Z} \\ \sin(\pi\lambda(n+1))\frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)}, & \textit{für } \lambda \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Beweis: Sei $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n} e^{i2\pi\lambda t} &= e^{i2\pi\lambda t} \cdot \sum_{t=1}^{n} e^{i2\pi\lambda(t-1)} \\
&= e^{i2\pi\lambda} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} e^{i2\pi\lambda t} \\
&= e^{i2\pi\lambda} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} \left(e^{i2\pi\lambda}\right)^t \\
&\overset{\textit{geom. Reihe}}{=} e^{i2\pi\lambda} \cdot \frac{1-\left(e^{i2\pi\lambda}\right)^n}{1-e^{i2\pi\lambda}} \\
&= \frac{e^{i2\pi\lambda} - e^{i2\pi\lambda(n+1)}}{1-e^{i2\pi\lambda}} \\
&= \frac{e^{i2\pi\lambda} - e^{i2\pi\lambda(n+1)}}{1-e^{i2\pi\lambda}} \cdot \frac{1}{e^{i\pi\lambda(n+1)}} \cdot \frac{\sin(\pi\lambda)}{\sin(\pi\lambda n)} \cdot e^{i\pi\lambda(n+1)} \cdot \frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)} \\
&\overset{\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^x - e^{-x}\right)}{=} \frac{e^{i2\pi\lambda} - e^{i2\pi\lambda(n+1)}}{1-e^{i2\pi\lambda}} \cdot \frac{1}{e^{i\pi\lambda(n+1)}} \cdot \frac{\frac{1}{2i}\left(e^{i\pi\lambda} - e^{-i\pi\lambda}\right)}{\frac{1}{2i}\left(e^{i\pi\lambda n} - e^{-i\pi\lambda n}\right)} \cdot \\
&\qquad e^{i\pi\lambda(n+1)} \cdot \frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)} \\
&= \frac{e^{i2\pi\lambda - i\pi\lambda n} - e^{-i\pi\lambda n} - e^{i\pi\lambda n + i2\pi\lambda} + e^{i\pi\lambda n}}{e^{i\pi\lambda n} - e^{-i\pi\lambda n} - e^{i\pi\lambda n + i2\pi\lambda} + e^{i2\pi\lambda - i\pi\lambda n}} \cdot e^{i\pi\lambda(n+1)} \cdot \frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)} \\
&= e^{i\pi\lambda(n+1)} \cdot \frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)}
\end{aligned}$$

Also folgt mit $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n} \cos(2\pi\lambda t) &= \Re\left(\sum_{t=1}^{n} e^{i2\pi\lambda t}\right) \\
&= \Re\left(e^{i\pi\lambda(n+1)} \cdot \frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)}\right) \\
&= \cos(\pi\lambda(n+1))\frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n} \sin(2\pi\lambda t) &= \Im\left(\sum_{t=1}^{n} e^{i2\pi\lambda t}\right) \\
&= \Im\left(e^{i\pi\lambda(n+1)} \cdot \frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)}\right) \\
&= \sin(\pi\lambda(n+1))\frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)}.
\end{aligned}$$

Obige Formeln gelten also für $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin(2\pi k) = 0$ und $\cos(2\pi k) = 1$. Also folgt für $\lambda \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{t=1}^{n} \cos(2\pi\lambda t) = \sum_{t=1}^{n} 1 = n$$

und

$$\sum_{t=1}^{n} \sin(2\pi\lambda t) = \sum_{t=1}^{n} 0 = 0.$$

□

Korollar 2. *Sei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. So gilt:*

$$\sum_{t=1}^{n} \cos\left(2\pi\frac{m}{n}t\right) = \begin{cases} n, & \text{für } m = n \\ 0, & \text{für } m < n \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^{n} \sin\left(2\pi\frac{m}{n}t\right) = 0.$$

Beweis: Für $m = n$ gilt $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$ und die Behauptung folgt direkt aus obigem Lemma. Sei also $m < n$ und folglich $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n} \cos\left(2\pi\frac{m}{n}t\right) &= \cos\left(\pi\frac{m}{n}(n+1)\right)\frac{\sin(\pi\frac{m}{n}n)}{\sin(\pi\frac{m}{n})} \\
&= \cos\left(\pi\frac{m}{n}(n+1)\right)\frac{\sin(\pi m)}{\sin(\pi\frac{m}{n})} \\
&\overset{\sin(\pi m)=0}{=} 0
\end{aligned}$$

Analog zeigt man die Behauptung für den Sinus. □

Lemma 3. *Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $k, m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k, m \leq [n/2]$ gilt:*

$$\sum_{t=1}^{n} \cos\left(2\pi \frac{k}{n} t\right) \cos\left(2\pi \frac{m}{n} t\right) = \begin{cases} n, & \text{für } k = m = 0 \text{ oder } n/2 \\ n/2, & \text{für } k = m \neq 0 \text{ und } \neq n/2 \\ 0, & \text{für } k \neq m \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^{n} \sin\left(2\pi \frac{k}{n} t\right) \sin\left(2\pi \frac{m}{n} t\right) = \begin{cases} 0, & \text{für } k = m = 0 \text{ oder } n/2 \\ n/2, & \text{für } k = m \neq 0 \text{ und } \neq n/2 \\ 0, & \text{für } k \neq m \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^{n} \cos\left(2\pi \frac{k}{n} t\right) \sin\left(2\pi \frac{m}{n} t\right) = 0.$$

Bemerkung 4.

- $[n/2]$ bezeichnet hier die Gaußklammer, also die größte ganze Zahl m mit $m \leq n/2$.
- Wegen $k, m \in \mathbb{N}$ tritt der Fall $k = m = n/2$ nur für gerade n auf, da sonst $n/2 \notin \mathbb{N}$

Beweis:[zu Lemma 3] Es sei im Folgenden stets $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$. Sei $k = m = 0$.

$$\sum_{t=1}^{n} \cos\left(2\pi \frac{k}{n} t\right) \cos\left(2\pi \frac{m}{n} t\right) = \sum_{t=1}^{n} 1 = n$$

und für $k = m = n/2$

$$\sum_{t=1}^{n} \cos\left(2\pi \frac{k}{n} t\right) \cos\left(2\pi \frac{m}{n} t\right) = \sum_{t=1}^{n} \cos(\pi t)^2 = n.$$

Sei nun also $k = m \neq 0$ und $\neq n/2$. So folgt wegen $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n} \left(\cos\left(2\pi \frac{k}{n} \cdot t\right)\right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{2k}{n} \cdot t\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} n - \sum_{t=1}^{n} \cos\left(2\pi \frac{2k}{n} \cdot t\right) \\ &\overset{\textit{Korollar 2}}{=} \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Sein nun also $k \neq m$. So folgt wegen $\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n} \cos\left(2\pi \frac{k}{n} t\right) \cos\left(2\pi \frac{m}{n} t\right) &= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{2} \left[\cos\left(2\pi \frac{k-m}{n} t\right) + \cos\left(2\pi \frac{k+m}{n} t\right)\right] \\ &\overset{\textit{Korollar 2}}{=} 0 \end{aligned}$$

Wegen $\sum_{t=1}^{n} \sin(x)^2 = \sum_{t=1}^{n} \left(1 - \cos(x)^2\right) = n - \sum_{t=1}^{n} \cos(x)^2$ folgen direkt die Aussagen für $\sin\left(2\pi \frac{k}{n} t\right) \sin\left(2\pi \frac{m}{n} t\right)$ mit $k = m$.

Sei nun also $k \neq m$. So folgt wegen $\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} \sin\left(2\pi\frac{k}{n}t\right) \sin\left(2\pi\frac{m}{n}t\right) &= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\cos\left(2\pi\frac{k-m}{n}t\right) - \cos\left(2\pi\frac{k+m}{n}t\right)\right] \\ &\overset{Korollar\ 2}{=} 0\end{aligned}$$

Sei nun k und m beliebig. So folgt wegen $\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} \sin\left(2\pi\frac{k}{n}t\right) \cos\left(2\pi\frac{m}{n}t\right) &= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\pi\frac{k-m}{n}t\right) - \sin\left(2\pi\frac{k+m}{n}t\right)\right] \\ &\overset{Korollar\ 2}{=} 0.\end{aligned}$$

$\square$