
SKRIPTUM
Numerik
Definitionen und Sätze

Inhaltsverzeichnis

1 Fehleranalyse	5
1.1 Zahlendarstellung	5
1.1.1 Gleitkommazahlen, absoluter Fehler, relativer Fehler	5
1.1.2 Maschinenoperationen, Maschinengenauigkeit eps	5
1.2 Konditionierung einer numerischen Aufgabe	5
1.2.1 Numerische Aufgaben, Kondition, Landau'sche Symbole	5
1.3 Stabilität eines numerischen Algorithmus	5
1.3.1 Gutartige (stabile) Algorithmen	5
2 Lineare Gleichungssysteme	5
2.1 Fehlerabschätzung	5
2.1.1 Vektorraum, Norm, Skalarprodukt	5
2.1.2 Äquivalenz von Normen	6
2.1.3 Matrixnorm (natürliche, max. Spaltensumme, max Zeilensumme)	6
2.1.4 Eigenwerte, Hermitesche Matrizen, positiv definit	6
2.1.5 Störungssatz für lineare Gleichungssysteme mit Hilfe der Kondition einer Matrix	6
2.2 Direkte Lösungsverfahren	7
2.2.1 Gauß'sche Elimination durch elementare Umformungen	7
2.2.2 Pivotelement, Spaltenpivotierung	7
2.2.3 LR Zerlegung der Matrix PA	7
2.2.4 Determinanten berechnen	7
2.2.5 Rangbestimmung	8
2.2.6 Inversenbestimmung (Gauß-Jordan Algorithmus)	8
2.2.7 Direkte LR-Zerlegung (Algorithmus von Crout)	8
2.3 Spezielle Gleichungssysteme	8
2.3.1 Bandmatrizen	8
2.3.2 Strikt diagonaldominante Matrizen (LR-Zerlegung ohne Permutationsmatrix)	8
2.3.3 Positiv definite matrizen (LR-Zerlegung ohne Permutationsmatrix)	8
2.3.4 Cholesky Zerlegung	9
2.4 Nicht-reguläre Systeme	9
2.4.1 Methode der kleinsten Fehlerquadrate	9
2.4.2 Normalgleichungssysteme $A^T Ax = A^T b$, Gauß'sche Ausgleichsrechnung	9
2.4.3 QR Zerlegung von A	9
2.4.4 Householder Transformation	9
3 Lineare Optimierung	10
3.1 Lineares Programm	10
3.1.1 Normalform	10
3.1.2 Graphische Lösung	10
3.1.3 Umformung zur Normalform	10
3.1.4 Struktur der Lösung eines Linearen Programms	10
3.1.5 Zulässiger Bereich $M = \{x Ax = b, x_i \geq 0\}$	10
3.1.6 Ecke von M (keine Konvexkombination liefert Ecke)	11
3.1.7 Zuordnung lin. unabh. Spalten von A zu Ecken von M	11
3.1.8 Lösung des Linearen Programms ist Ecke	11
3.2 Simplex Verfahren	11
3.2.1 Tableau Erstellung	11

3.2.2	Phase II (Basistausch bis zu Lösungsecke)	11
3.2.3	Phase I (Konstruktion einer Startecke)	11
3.2.4	Entartete Ecken	12
4	Interpolation	12
4.1	Polynominterpolation	12
4.1.1	Lagrange'sche Interpolationsaufgabe mit Polynomen, Eindeutigkeit, Lagrange'sche Basispolynome	12
4.1.2	Neville Schema, Neville'sches Interpolationspolynom (rekursiv)	13
4.1.3	Newton'sche Darstellung des Interpolationspolynoms, Dividierende Differenzen, Newton Schema	13
4.1.4	Hornerschema	13
4.1.5	Interpolation von Funktionen, Restglieddarstellung	14
4.1.6	Interpolatorische Fehler	14
4.1.7	Fehlerempfindlichkeit des Lagrange'schen Interpolationspolynoms	14
4.1.8	Hermite Interpolation	14
4.1.9	Extrapolation am Beispiel der l'Hospital'schen Regel	14
4.2	Trigonometrische Interpolation	15
4.2.1	Diskrete Fourier-Analyse	15
4.2.2	Gerade, ungerade Fortsetzung	15
4.2.3	Schnelle Fourier Transformation	16
5	Numerische Integration	16
5.1	Interpolatorische Quadraturformel	16
5.1.1	Newton-Cotes Formel bei äquidistanten Stützstellen und Restglieddarstellung	16
5.1.2	Summierte Quadraturformeln und Restglied	17
5.2	Gauß'sche Quadraturformel	17
5.2.1	Ordnung einer Quadraturformel	17
5.2.2	Gauß'sche Quadraturformel, Konstruktion	17
5.2.3	Stützstellen sind Nullstellen des Legendre Polynoms	17
5.2.4	Gewichte der Gauß'schen Quadraturformel und Restglied	18
5.3	Romberg'sche Integration	18
5.3.1	Extrapolation der summierten Trapezregel	19
5.3.2	Schema bei sukzessiver Intervallhalbierung (Neville)	19
5.4	A-posteriori-Abschätzung	19
5.4.1	Vorgabe: Fehler ϵ , finde Schrittweite h	19
6	Nullstellenbestimmung reellwertiger Funktionen	19
6.1	Intervallschachtelung	19
6.2	Newton-Verfahren	19
6.2.1	lokales Konvergenzverhalten	20
6.2.2	Newton-Iteration bei mehrfachen Nullstellen	20
6.2.3	Newton-Verfahren bei Polynomen	20
6.3	Konvergenzverhalten von Iterationsverfahren	20
6.3.1	Konvergenz der Ordnung p	20
6.4	Konstruktion von Verfahren höherer Ordnung	21
6.4.1	Numerische Bedeutung des Ordnungsbegriffes	21
6.5	Weitere Iterationsverfahren	21
6.5.1	Sekantenmethode	21
6.5.2	Konvergenzeigenschaft der Sekantenmethode	21
6.5.3	Regula falsi	21

7	Matrizeigenwertaufgaben	22
7.1	Charakteristisches Polynom	22
7.2	Konditionierung des Eigenwertproblems	22
7.2.1	Gerschgorinkreise	22
7.2.2	Störungssatz	23
7.3	Iterative Verfahren	23
7.3.1	Potenzmethode	23
7.4	Reduktionsmethode	23
7.4.1	Jordannormalform	23
7.4.2	durch Ähnlichkeitstransformation, Konditionierung der Ähnlichkeitstransformation, z. B. Householder	24
7.5	Eigenwertproblem für Hessenberg- oder Tridiagonalmatrizen	24
7.5.1	LR Zerlegung	24
7.5.2	QR Zerlegung	24
7.5.3	Charakteristisches Polynom einer Hessenbergmatrix	25
7.5.4	Charakteristisches Polynom einer symmetrischen Tridiagonalmatrix	25
8	Iterative Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme	26
8.1	Fixpunktiteration	26
8.1.1	Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren	26
8.1.2	Konvergenz, Spektralradius	26
8.1.3	Relaxationsverfahren	27
8.2	Abstiegsverfahren, Gradientenverfahren	27
8.2.1	Modellproblem	27
9	Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen	27
9.1	Anfangswertaufgaben, AWA	27
9.2	Theorie	28
9.2.1	Vektorfeld	28
9.2.2	Existenzsatz von Peano	28
9.2.3	Eindeutigkeit	28
9.3	Numerik	29
9.4	Explizite Einschrittmethoden	29
9.4.1	Polygonzugverfahren	29
9.4.2	Diskretisierungsfehler	29
9.4.3	Konsistenz, Konsistenzordnung	29
9.4.4	Runge-Kutta-Formeln	30
9.5	Lokale und globale Konvergenz	30
9.6	Schrittweitenkontrolle	31
9.7	Numerische Stabilität	31
9.7.1	Stabilitätsgebiete	31
9.8	Extrapolationsmethode	31
9.8.1	Gragg-Stoer-Bulisch	31
9.9	Lineare Randwertaufgaben	32
9.9.1	Einfache Schießmethoden	32
9.9.2	Mehrfachschießmethode	32

1 Fehleranalyse

1.1 Zahlendarstellung

1.1.1 Gleitkommazahlen, absoluter Fehler, relativer Fehler

Q-stellige Dezimaldarstellung durch Aufrunden oder Abrunden. Der absolute Fehler $fl(x) - x$ und der relative Fehler $\frac{fl(x) - x}{x}$.

1.1.2 Maschinenoperationen, Maschinengenauigkeit eps

Entspricht der Obergrenze des relativen Fehlers $eps := 5 \cdot 10^{-q}$.

1.2 Konditionierung einer numerischen Aufgabe

1.2.1 Numerische Aufgaben, Kondition, Landau'sche Symbole

Berechnung endlich vieler Größen mittels funktionaler Vorschriften.

Die Kondition beschreibt die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten. Die Konditionszahl stellt ein Maß für diese Abhängigkeit dar.

Fehlerfortpflanzung bei Funktionen über Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Taylorentwicklung.

1.3 Stabilität eines numerischen Algorithmus

Zusatzdefinition. Fehler des Algorithmus überschreiten nicht den Rundungsfehler.

1.3.1 Gutartige (stabile) Algorithmen

Multiplikation ist numerisch stabil. Addition ist numerisch nicht stabil.

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Fehlerabschätzung

2.1.1 Vektorraum, Norm, Skalarprodukt

2.1.2 Äquivalenz von Normen

Zusatzdefinition. Es seien im linearen Raum X zwei Normen $\|x\|$ und $\|x\|^*$ gegeben. Sie heißen äquivalent, wenn gilt

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|^* \leq \beta\|x\|$$

Zusatzsatz. In einem linearen Raum X endlicher Dimension sind alle Normen äquivalenten.

2.1.3 Matrixnorm (natürliche, max. Spaltensumme, max Zeilensumme)

Zusatzdefinition. Definition der Grenznorm (lub) einer Matrix.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Zusatzbeispiel. Die Grenznormen von $\|x\|_1$ (Spaltensummennorm), $\|x\|_2$ (Spektralnorm oder Hilbertnorm, Wurzel des größten Eigenwertes von $A^H A$), $\|x\|_\infty$ (Zeilensummennorm), Frobeniusnorm ($\sum |a_{ik}|^2$)^{1/2} (nicht induziert aus Norm)

Zusatzbemerkung. Unitäre Matrizen besitzen den Wert $\text{lub}_2(U) = 1$.

Zusatzdefinition. Definition der Submultiplikativität und Verträglichkeit einer Matrixnorm.

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

2.1.4 Eigenwerte, Hermitesche Matrizen, positiv definit

Zusatzdefinition. Definition von *positiv definit*. (Jeweils reell und komplex, jeweils mit symmetrisch bzw. heritesch).

2.1.5 Störungssatz für lineare Gleichungssysteme mit Hilfe der Kondition einer Matrix

(a) Wie ändert sich x , falls b geändert wird ($Ax = b$)?

$$\frac{\|x' - x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|b' - b\|}{\|b\|}, \quad \text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

BEWEIS: Folgt aus Submultiplikativität und Verträglichkeit:

$$\|x' - x\| \leq \|A^{-1}\| \|b' - b\| \quad \text{und} \quad \|b\| \leq \|A\| \|x\|$$

□

(b) Wie ändert sich x , falls A geändert wird?

$$\frac{\|x' - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|A' - A\|} \frac{\|A' - A\|}{\|A\|}$$

Zusatzbemerkung. Pivolisieren im Gauß'schen Eliminationsverfahren hat Auswirkungen auf die Kondition. Für unitäre Matrizen ist $\text{cond}_2(U) = 1$, somit kann keine so große Verschlechterung wie bei Gauß auftreten (vgl. Householder).

2.2 Direkte Lösungsverfahren

2.2.1 Gauß'sche Elimination durch elementare Umformungen

Zusatzbemerkung. Aufwand: $\frac{n^3}{3} + o(n^2)$

Man bringt das Lineare Gleichungssystem mit Hilfe elementarer Umformungen von der Form (A, b) auf (R, c) . Dies lässt sich auch mithilfe von *Permutations-* und *Frobenius-Matrizen* schreiben.

2.2.2 Pivotelement, Spaltenpivotierung

$|a_{r1}| = \max\{|a_{j1}| : j = 1, 2, \dots, n\}$. Es verhindert die Division durch Null oder kleine Zahlen und macht so das Verfahren numerisch stabiler (Kondition steigt nicht so schnell).

2.2.3 LR Zerlegung der Matrix PA

Zusatzsatz. *Es sei A eine nichtsinguläre $n \times n$ -Matrix.*

- (a) *Sind die Hauptabschnittsmatrizen nichtsingulär, so gibt es Matrizen L und R , so dass $A = LR$.*
- (b) *Sind nicht alle Hauptabschnittsmatrizen nichtsingulär, so gibt es eine Permutationsmatrix P , so dass gilt $PA = LR$.*

BEWEIS: 1. Das Gaußsche Eliminationsverfahren kann ohne Zeilentausch durchgeführt werden und liefert die Zerlegung. 2. Durch Zeilentauschen kann erreicht werden, dass alle Hauptabschnittsmatrizen nichtsingulär sind. Dann 1. □

Zusatzbemerkung. Aus $LRx = b$ berechnet man zuerst d aus $Ld = b$ und dann x aus $Rx = d$.

2.2.4 Determinanten berechnen

$\det(PA) = \det(P) \cdot \det(A) = \pm \det(L) \cdot \det(R) = \pm \det(R) \Rightarrow \det(A) = \det(R)$, da die Matrix L normiert ist. Bei Diagonalmatrizen entspricht das Produkt der Diagonaleinträge genau der Determinanten.

2.2.5 Rangbestimmung

Zusatzbemerkung. Rangbestimmung beispielsweise über Treppenzerlegung möglich.

2.2.6 Inversenbestimmung (Gauß-Jordan Algorithmus)

Eine Invertierung entspricht der Simultanen Lösung von n LGS ($AA^{-1} = I \Leftrightarrow A \cdot x^{(k)} = e_k$). Entweder löst man diese direkt oder führt simultane Gauß-Elimination durch. $(A, I) \rightarrow (R, C)$. Dann gilt $RA^{-1} = C$ und man hat 3 Möglichkeiten:

- (a) Man berechnet die Inverse Spaltenweise aus $Rx^{(k)} = c^{(k)}$
- (b) *Gauß-Jordan-Transformation*, man setzt die Elimination fort bis man $(R, C) \rightarrow (I, A^{-1})$ erhält.
- (c) Sukzessiver Austausch der Komponenten von x gegen solche von y .

2.2.7 Direkte LR-Zerlegung (Algorithmus von Crout)

In der LR -Zerlegung können n Zellen festgelegt werden, da A nur n^2 Bestimmungsgleichungen enthält. Man legt hierbei die Diagonale von L fest und berechnet daraus und immer aus bekannten Werten die Elemente von L und R .

2.3 Spezielle Gleichungssysteme

2.3.1 Bandmatrizen

Geringer Speicherbedarf und Aufwand.

2.3.2 Strikt diagonaldominante Matrizen (LR-Zerlegung ohne Permutationsmatrix)

$$\sum_{k \neq j} |a_{jk}| < |a_{jj}|$$

2.3.3 Positiv definite Matrizen (LR-Zerlegung ohne Permutationsmatrix)

Zusatzsatz. *Ist A positiv definit, so sind alle Untermatrizen (Hauptabschnittsmatrizen) positiv definit, ja sogar alle Hauptuntermatrizen (Entlang der Diagonalen).*

Zusatzbemerkung. Also können wir, wenn A eine positiv definite $n \times n$ Matrix ist, Gauß-Elimination mit (und sogar ohne) Zeilentausch anwenden (vgl. vorheriger Satz).

2.3.4 Cholesky Zerlegung

Zusatzbemerkung. Aufwand: $\frac{n^3}{6} + o(n^2)$

Zusatzsatz. Ist A positiv definit, so existiert genau eine untere Dreiecksmatrix mit $l_{kk} > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$, so dass $A = LL^H$.

BEWEIS: Induktion mit einer Matrix $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ b^H & a_{nn} \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ c^H & \alpha \end{pmatrix}$. \square

Zusatzbemerkung. Das Cholesky-Verfahren berechnet die Matrix L mithilfe des letzten Satzes rekursiv und spaltenweise. Dann berechnet aus $LL^H x = b$ zuerst d aus $Ld = b$ und dann x aus $L^H x = d$.

2.4 Nicht-reguläre Systeme

2.4.1 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$\min \sum_{i=1}^m \left(b_i - \sum k_1^n x_k u_k(t_i) \right)^2$$

2.4.2 Normalgleichungssysteme $A^T A x = A^T b$, Gauß'sche Ausgleichsrechnung

2.4.3 QR Zerlegung von A

Zusatzbemerkung. Aufwand: $\frac{2}{3}n^3 + o(n^2)$

Zusatzdefinition. Definition von *orthogonalen* und *unitären* Matrizen.

Zusatzbemerkung. Eine Multiplikation eines Vektors mit einer reellen orthogonalen oder einer unitären Matrix verändert die Euklidische Länge des Vektors nicht und die Eigenwerte unitärer Matrizen haben die Länge $|\lambda| = 1$.

Zusatzbemerkung. Die QR-Zerlegung einer Matrix A ist nicht eindeutig. Aus einer QR-Zerlegung kann man wegen $Q^H = Q^{-1}$ sehr schnell $Rx = c$ bestimmen und dann x .

2.4.4 Householder Transformation

Zusatzlemma. Die durch $U = I - 2\omega\omega^H$ mit $\omega \in \mathbb{C}^n$ und $\|\omega\|_2 = 1$ (Householder-Matrizen) definierten $n \times n$ Matrizen sind unitär, hermitesch und involutorisch.

BEWEIS: Nachrechnen. \square

Zusatzlemma. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , sowie e_1 der erste Einheitsvektor des \mathbb{R}^n . Zu jedem Vektor $v \in \mathbb{K}^n$, der linear unabhängig zu e_1 ist, existiert eine Householder-Matrix $U = I - 2\omega\omega^H$ ($\omega \in \mathbb{K}^n$), die die folgende Eigenschaft besitzt ($\alpha \in \mathbb{K}$):

$$Uv = \alpha e_1$$

BEWEIS: Vektor lässt sich direkt angeben $\omega = \frac{v - \alpha e_1}{\|v - \alpha e_1\|_2}$ mit geeignetem α . □

Zusatzbemerkung. Aus dem vorherigen Satz lässt sich iterativ eine QR-Zerlegung gewinnen. Dabei muss die Matrix Q nie direkt ausgerechnet werden, man kann auch nur mit den Iterationsmatrizen arbeiten.

3 Lineare Optimierung

Maximiere eine Zielfunktion $\sum_{k=1}^q c_k x_k$ unter Nebenbedingungen $\sum_{k=1}^q a_{jk} x_k \leq b_j$ $j = 1, \dots, m$, $x_k \geq 0$, $k = 1, \dots, q$.

3.1 Lineares Programm

Zusatzdefinition. Definition des *Standardproblems der linearen Optimierung* bzw. eines *Linearen Programms*.

Verwendung von Schlupfvariablen um die Ungleichungen in Gleichungen zu verwandeln.

3.1.1 Normalform

$$\begin{array}{l} \max z \\ \text{unter den NB} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ c & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

$$c = (-c_1, \dots, -c_n)$$

Zusatzdefinition. Definition von *vollständig* und *zulässig*, *Basislösung*.

3.1.2 Graphische Lösung

3.1.3 Umformung zur Normalform

3.1.4 Struktur der Lösung eines Linearen Programms

3.1.5 Zulässiger Bereich $M = \{x | Ax = b, x_i \geq 0\}$

3.1.6 Ecke von M (keine Konvexkombination liefert Ecke)

3.1.7 Zuordnung lin. unabh. Spalten von A zu Ecken von M

3.1.8 Lösung des Linearen Programms ist Ecke

3.2 Simplex Verfahren

3.2.1 Tableau Erstellung

Zusatzsatz. *Ablauf der Simplexmethode und zugehöriges Starttableau.*

$$\begin{pmatrix} A & 0 & b \\ c & 1 & d \end{pmatrix}$$

- (a) Wähle $c_s < 0$ minimal sonst STOP (Optimallösung)
- (b) Zeile so, dass $\frac{b_r}{a_{rs}}$ minimal
 - Falls alle $a_{rs} \leq 0 \Rightarrow$ keine endliche optimale Lösung möglich
 - Andernfalls Einheitsvektor erstellen.

3.2.2 Phase II (Basistausch bis zu Lösungsecke)

Zusatzdefinition. Definition von *nicht entartet*.

Zusatzsatz. (a) *Sind alle bei der Phase II der Simplexmethode auftretenden Tableaus nicht entartet, so endet das Verfahren nach endlich vielen Schritten mit einem optimalen Tableau. Die Basislösung dieses optimalen Tableaus ist eine Optimallösung.*

- (b) *Tritt bei der Phase II der Simplexmethode Entartung auf, so kann man dafür sogen (z. B. lexikographische Simplexmethode), dass keine Basislösung öfter als einmal auftaucht. Dann konvergiert die Phase II nach endlich vielen Schritten.*

BEWEIS: Jede Basis besteht aus m der n Indizes. Es gibt also stets nur $\binom{n}{m}$ verschiedene Basen und maximal so viele zulässige, da der Gewinn steigt kann keine Basislösung zweimal auftreten (in 2. auch ausgeschlossen). \square

3.2.3 Phase I (Konstruktion einer Startecke)

Falls kein vollständiges zulässiges Lineares Programm vorliegt, so müssen wir eine Phase I vorschalten:

- (a) Sind nicht alle $b_i \geq 0$, so multipliziere die Zeile mit -1 .

- (b) Enthält die Matrix A alle Einheitsvektoren als Spalten, so können wir durch Gaußelimination die zugehörigen c_j zu Null machen und erhalten ein vollständiges Lineares Programm
- (c) Falls wir einfach m -Spalten auswählen, so könnte die zugehörige Matrix A_J singulär sein, oder die zugehörige Basislösung könnte nicht zulässig sein (negative Komponenten). Dann gehen wir wie folgt vor:
 O.E. sind alle $b_j \geq 0$. Wir verwenden statt der Matrix A die Matrix (A, I_m) und verwenden die zusätzliche Nebenbedingung $x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m} + z = 0$. Das modifizierte Starttableau ist dann

$$\begin{pmatrix} A^* & 0 & b \\ c^* & 1 & d=0 \end{pmatrix} \quad c^* = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1),$$

das durch Subtraktion aller Zeilen 1 bis m von $m+1$ in ein vollständiges zulässiges Lineares Programm überführt werden kann. Ist dann $d = 0$, dann ist die zugehörige optimale Basis zulässige Basis für $Ax = b$. Und wir können Phase II mit dieser zulässigen Lösung einläuten. Andernfalls besitzt das Lineare Programm keine zulässige Lösung.

3.2.4 Entartete Ecken

Ein Tableau ist entartet \Leftrightarrow Gewinn beim nächsten Simplex ändert sich nicht.

4 Interpolation

Zusatzdefinition. Definition des *Interpolationsproblems*.

Zusatzbemerkung. Das Interpolationsproblem ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem $\sum_{k=0}^n c_k u_k(x_j) = y_j$ mit einer Basis u_k . Demnach lassen sich Aussagen der lin. Algebra verwenden (Für beliebige Seite eindeutig lösbar \Leftrightarrow Matrix nichtsingulär \Leftrightarrow Homogene System hat nur die Nulllösung)

Zusatzbemerkung. Für numerisches Rechnen genügt es nicht dass die Matrix nichtsingulär ist, man benötigt, dass diese nicht schlecht konditioniert ist (Beeinflussung durch Basiswechsel).

4.1 Polynominterpolation

4.1.1 Lagrange'sche Interpolationsaufgabe mit Polynomen, Eindeutigkeit, Lagrange'sche Basispolynome

Zusatzsatz. Zu beliebigen $n+1$ verschiedenen Stützstellen x_0, \dots, x_n in \mathbb{C} und zu beliebigen komplexen Zahlen y_0, \dots, y_n gibt es genau ein $P \in \mathcal{P}_n$ mit der Interpolationseigenschaft. Sind alle Stützstellen reell so auch das Interpolationspolynom.

BEWEIS: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt das homogene System nur die Nulllösung. □

Zusatzbemerkung. Mit Hilfe der *Lagrangeschen Stützpolynome* $L_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$ kann man das Interpolationspolynom mit $P := \sum_{j=0}^n y_j L_j$ angeben.

4.1.2 Neville Schema, Neville'sches Interpolationspolynom (rekursiv)

Zusatzdefinition. Ziel des *Neville Schema*.

Ziel ist es nur einen fest vorgegebenen Wert des Interpolationspolynoms zu berechnen. Dabei gilt die folgende Formel für die Interpolierende Gerade und die Rekursionsformel (Interpolationspolynome für $k + 1$ Bedingungen):

$$P_{j,1} = \frac{(x-x_j)y_{j+1} + (x_{j+1}-x)y_j}{x_{j+1}-x_j} \quad P_{j,k}(x) = \frac{(x-x_j)P_{j+1,k-1}(x) + (x_{j+k}-x)P_{j,k-1}(x)}{x_{j+k}-x_j}$$

Man berechnet zuerst die $P_{j,1}$ und dann iterativ die weiteren, der Wert von $P(x)$ entspricht $P_{0,n}(x)$.

4.1.3 Newton'sche Darstellung des Interpolationspolynoms, Dividierende Differenzen, Newton Schema

Zusatzdefinition. Definition der *Dividierenden Differenzen* (besonders einfach für äquidistante Stützstellen).

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

Zusatzsatz. Das Interpolationspolynom kann dargestellt werden durch

$$P(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \underbrace{\prod_{j=0}^{n-1} (x-x_j)}_{\text{Newton'sche Basispolynome}}$$

BEWEIS: Induktion über den Hauptkoeffizienten und die Rekursionsformel von Neville und die Nullstellen von $P_{0,n} - P_{0,n-1}$. □

Zusatzbemerkung. Weiterer Punkt erzeugt nur zusätzliche Zeile im Schema.

4.1.4 Horner-Schema

Zusatzdefinition. Für das numerische Rechnen ist es wichtig, die Newton'sche Interpolationsformel geschickt auszuwerten, etwa nach dem *Horner-Schema* (leichter ableiten).

$$P(t) = \left(\dots \left(\left(c_n(t-x_{n-1}) + c_{n-1} \right) (t-x_{n-2}) + c_{n-2} \right) \dots \right) (t-x_0) + c_0$$

4.1.5 Interpolation von Funktionen, Restglieddarstellung

Zusatzsatz. Sei $f \in C^{n+1}[a, b]$ und $P \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom. Zu jedem $x \in [a, b]$ existiert ein η_x in $\text{conv}(x, x_0, \dots, x_n)$ mit der Eigenschaft

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

BEWEIS: Definition einer Konstanten und Betrachtung einer Funktion, die nach Rolle eine Nullstelle in der $n + 1$ -ten Ableitung hat. □

4.1.6 Interpolatorische Fehler

Zusatzsatz (Weierstraß). Sei $f \in C[a, b]$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty = 0$, d. h. man kann eine stetige Funktion durch Polynome beliebig genau annähern.

Zusatzbemerkung. Man darf dabei die Interpolationsstellen nicht unbedingt äquidistant wählen, wie Runge erkannt hat. Beispielsweise wählt man Chebyshev-Knoten. Auch ist die Basis $\{1, x, \dots, x^n\}$ numerisch sehr schlecht. Besser sind hier die Chebyshev Polynome.

4.1.7 Fehlerempfindlichkeit des Lagrange'schen Interpolationspolynoms

Numerisch instabil.

4.1.8 Hermite Interpolation

Zusatzbemerkung. Interpolationsart (Verallgemeinerung von Lagrange), bei der man ein äquidistantes Gitter verwenden kann und dann ähnlich wie bei Splines die einzelnen Bereiche getrennt interpoliert. Dabei fordert man, dass die Ableitungen in den Punkten auch übereinstimmen, also die Interpolationsfunktion glatt ist.

4.1.9 Extrapolation am Beispiel der l'Hospital'schen Regel

Zusatzbemerkung. Hat man einen Grenzwert den man normal nicht berechnen kann, z. B. nur mit l'Hospital, so kann man zu einem Interpolationspolynom an den Stellen $(h, \alpha(h))$ übergehen und dort den Punkt (Grenzwert) einsetzen (z. B. mit Neville).

4.2 Trigonometrische Interpolation

Zusatzdefinition. Definition eines *trigonometrischen Polynoms* vom Grad $\leq n$ \mathcal{T}_n und deren *komplexe Schreibweise*. Angabe der Basis des Raums aller Trigonometrischen Funktionen. (Dimension $2n + 1$).

$$\left\{ e^{ikx} \right\}_{k=-n}^n \quad \{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$$

Zusatzsatz. Zu $2n + 1$ Stützpunkten gibt es genau ein $T_n \in \mathcal{T}_n$ mit der Eigenschaft $T_n(x_j) = y_j$.

BEWEIS: Durch Substitution $z = e^{ix}$ erhält man den Einheitskreis und eine vorherige Interpolation ist möglich. \square

4.2.1 Diskrete Fourier-Analyse

Zusatzsatz (Trigonom. Interp. mit äquidist. Stützstellen (einfache Rechnung)). *Es seien die Zahlen y_0, y_1, \dots, y_{2n} gegeben. Es sei $T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ das trigonometrische Interpolationspolynom für äquidistante Stützstellen, dann ist*

$$c_k = \frac{1}{2n + 1} \sum_{j=0}^{2n} y_j e^{-2\pi ijk/(2n+1)}, \quad k = -n, \dots, n$$

BEWEIS: Nachrechnen mit Cauchy-Produkt und Orthogonalitätsrelation. \square

Zusatzdefinition (Allgemeine Fourierzerlegung). Definition der *Entwicklung von f in ihre Fourierreihe* und der *Fourierkoeffizienten*.

$$s_n(f, x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

Zusatzbemerkung. Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten verwendet man dann z.B. die Trapezregel.

Zusatzbemerkung. Auch für die trigonometrischen Polynome gibt es einen Satz von Weierstraß.

4.2.2 Gerade, ungerade Fortsetzung

Zusatzbemerkung. Man setzt eine bestehende Funktion $t \in [0, T/2]$ zu einer periodischen Funktion fort. Entweder *gerade* oder *ungerade*. Bei der Fourierentwicklung fallen dann Koeffizienten weg.

4.2.3 Schnelle Fourier Transformation

Zusatzbemerkung. Aufwand: $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$

Zusatzdefinition. Beschreibung der *Fast Fourier Transform* Die Berechnung der Koeffizienten c_k , $-N \leq k \leq N$ dauert sehr lange wenn N groß ist. Wegen $c_{-k} = c_{N-k}$ genügt es aber die c_k mit $N-1 \geq k \geq 0$ auszurechnen. Teilt man die dort auftretende Summe wieder in gerade und ungerade Indizes auf ($N = 2^q$), so handelt es sich wieder um Summen gleicher Struktur, bei denen wieder nur die Hälfte der Koeffizienten ausgerechnet werden müssen.

5 Numerische Integration

5.1 Interpolatorische Quadraturformel

5.1.1 Newton-Cotes Formel bei äquidistanten Stützstellen und Restglieddarstellung

Zusatzdefinition. Definition der *Trapezregel*

$$T(h) = \int_a^b \sigma(x) dx = h \left\{ \frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + \frac{f(b)}{2} \right\}$$

Zusatzsatz. Sei $f \in C^2[a, b]$. Dann gibt für $N \in \mathbb{N}$ und $h = (b-a)/N$:

$$\left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \|f''\|_\infty$$

BEWEIS: Interpolationsabschätzung für alle Teilbereiche abschätzen und Summieren. \square

Zusatzdefinition. Definition der *Simpsonregel*

$$S(h) = \int_a^b \sigma(x) dx = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^{q-1} \{f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})\}$$

Zusatzsatz. Sei $f \in C^4[a, b]$. Dann lässt sich eine Fehlerabschätzung angeben:

$$\left| S(h) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

BEWEIS: Interpolationsabschätzung für alle Teilbereiche abschätzen und Summieren. \square

5.1.2 Summierte Quadraturformeln und Restglied

Zusatzbemerkung. Es ist schlechter Polynome höherer Ordnung zu verwenden als den Bereich aufzuteilen und Summen zu bilden.

5.2 Gauß'sche Quadraturformel

5.2.1 Ordnung einer Quadraturformel

Zusatzdefinition. Die *Ordnung* einer Quadraturformel entspricht dem Exaktheitsgrad (für Polynome) plus Eins.

Zusatzbemerkung. Man kann zeigen, dass keine Quadraturformel mit n Stützstellen existiert, die alle Polynome bis Grad $2n$ exakt integriert.

5.2.2 Gauß'sche Quadraturformel, Konstruktion

Zusatzdefinition. *Gauß'sche Quadraturformel.*

Man möchte eine Funktion integrieren, die mit einer *Gewichtsfunktion* (stetig und positiv und die Momente $\int_a^b w(x)x^k dx$ existieren) versehen ist. Man suche Abszissen $x_1 < \dots < x_n$ und Gewichte w_1, \dots, w_n , so dass die Quadraturformel für alle algebraischen Polynome f möglichst hohen Grades mit dem Integral übereinstimmt.

Zusatzsatz. *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jeder Gewichtsfunktion gibt es eindeutig bestimmte Abszissen und Gewichte, so dass für alle algebraischen Polynome vom Grade $\leq 2n - 1$ gilt:*

$$\sum_{j=1}^n w_j f(x_j) = \int_a^b w(x) f(x) dx$$

5.2.3 Stützstellen sind Nullstellen des Legendre Polynoms

Zusatzsatz (Orthogonalpolynome für das Gewicht w). *Zu einer vorgegebenen Gewichtsfunktion gibt es eine eindeutig bestimmte Folge von Polynomen, die orthogonal sind für:*

$$\langle P_i, P_j \rangle := \int_a^b w(x) P_i(x) P_j(x) dx$$

BEWEIS: Gemäß dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren. □

Zusatzsatz. *Die Nullstellen $x_j, j = 1, \dots, n$, des Orthogonalpolynoms P_n sind verschieden und liegen in (a, b) .*

Zusatzsatz. *Für beliebige paarweise verschiedene Zahlen t_1, t_2, \dots, t_n ist die $n \times n$ Matrix $(P_i(t_j))_{ij}$ $i = 0, \dots, n - 1, j = 1, \dots, n$ nichtsingulär.*

BEWEIS: Wäre sie singular, so wären alle Zeilenvektoren linear abhängig und das Polynom $P = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_j P_j$ hätte zu viele Nullstellen. \square

Zusatzsatz. Es seien x_1, \dots, x_n die Nullstellen des Orthogonalpolynoms P_n . Für die eindeutige und positive Lösung (w_1, \dots, w_n) des LGS

$$\sum_{j=1}^n P_k(x_j) w_j = \begin{cases} \int_a^b w(x) dx, & \text{für } k = 0 \\ 0, & \text{für } k = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

gilt:

$$\int_a^b w(x) P(x) dx = \sum_{j=1}^n w_j P(x_j) \text{ für alle } P \in \mathcal{P}_{2n-1}.$$

BEWEIS: LGS eindeutig aus vorherigen Sätzen. Zerlegung von $P = P_n Q + R$ mit $Q, R \in \mathcal{P}_{n-1}$ und eindeutig darstellbar durch P_k $k \leq n-1$. Berechnung des Integrals (Nutzung der Orthogonalität) liefert gleiches wie die Summe (Nutzung der Nullstellen). \square

5.2.4 Gewichte der Gauß'schen Quadraturformel und Restglied

Zusatzbeispiel. Legendre Polynome zu $w = 1$, Chebyshev Polynome zu $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Zusatzsatz. Ist $f \in C^{2n}[a, b]$, so gilt (mit Gleichheit für alle Polynome vom Grade $2n$)

$$\left| \sum_{j=1}^n w_j f(x_j) - \int_a^b w(x) f(x) dx \right| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_{\infty}}{(2n)!} \langle P_n, P_n \rangle$$

BEWEIS: Vorgabe eines Polynoms mit $2n$ Bedingungen mit NS von Orthogonalpolynomen, für diese die Fehlerabschätzung berechnen. \square

5.3 Romberg'sche Integration

Zusatzsatz (Euler-Maclaurinsche Summenformel). Es sei $f \in C^{2m+2}[a, b]$ für ein $m = 0$ oder $m \in \mathbb{N}$ und $h := (b-a)/N$. Dann besitzt die Trapezsumme die asymptotische Entwicklung

$$T(h) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{j=1}^m \frac{B_{2j}}{(2j)!} h^{2j} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) + h^{2m+2} \alpha_{m+1}(h, f)$$

Zusatzbemerkung. Für periodische Funktionen (z. B. Fourierkoeffizienten) liefert die Euler-Maclaurinsche Summenformel, dass die Trapezregel sehr gute Ergebnisse liefert, da die Summe (Periodizität der Ableitung) herausfällt.

5.3.1 Extrapolation der summierten Trapezregel

Zusatzdefinition. *Rombergverfahren* aus der Trapezregel. Die Euler-Maclaurinsche Summenformel liefert eine Restglieddarstellung für $T(h) - \int_a^b f(x)dx$ und ebenfalls möglich für halbierte Intervallgröße. Aus beiden lässt sich dann ein Verfahren kombinieren, sodass man ein Verfahren höherer Ordnung erhält und allgemein noch höherer Ordnung.

5.3.2 Schema bei sukzessiver Intervallhalbierung (Neville)

Zusatzdefinition. Aussehen des *Tableaus zum Romberg-Verfahren*.

5.4 A-posteriori-Abschätzung

Zusatzbemerkung. *A-priori* Abschätzungen verwenden $f^{(n)}(\eta) (I(f) - I_h)$, *A-posteriori* verwenden statt Ableitungen $o(h) (I_{\frac{h}{2}} - I_h)$.

5.4.1 Vorgabe: Fehler ϵ , finde Schrittweite h

6 Nullstellenbestimmung reellwertiger Funktionen

Zusatzdefinition. Definition von *Iterationsfunktion*, *Fixpunkt* und *stark kontrahierend* für Funktionen.

Zusatzsatz (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei X ein vollständiger metrischer Raum mit Metrik d . Jede stark kontrahierende Abbildung $F : X \rightarrow X$ besitzt genau einen Fixpunkt x^* in X . Das Iterationsverfahren konvergiert für jeden Startpunkt $x_0 \in X$ und es gilt $d(x_k, x^*) \leq \frac{M^k}{1-M} d(x_0, x_1)$*

BEWEIS: Dreiecksungleichungen auf die Folge $(x_k)_{k=0}^{\infty} \Rightarrow$ Cauchyfolge. □

6.1 Intervallschachtelung

Zusatzdefinition. Definition des *Bisektionsverfahren*. Ähnlich wie Regula falsi, nur dass das Intervall immer halbiert wird.

6.2 Newton-Verfahren

6.2.1 lokales Konvergenzverhalten

Man bildet die Tangente $T(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ an einen Punkt und bestimmt den Nullpunkt und iteriert dies und erhält das *Newton-Verfahren*.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Zusatzsatz. Sei $f \in C^2[a, b]$ und x^* eine Nullstelle von f mit $f'(x^*) \neq 0$, dann hat das *Newton-Verfahren* die Ordnung $p \geq 2$ und genau $p = 2$ falls $f''(x^*) \neq 0$.

BEWEIS: Ableiten der Iterationsfunktion und dann (späterer) Satz. □

6.2.2 Newton-Iteration bei mehrfachen Nullstellen

Zusatzbemerkung. Das *Newton-Verfahren* besitzt bei Nullstellen m -ter Ordnung nur die Ordnung 1. Besser ist dann das Verfahren *Doppelschrittverfahren*:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(m+1)f(x_k)}{f'(x_k)}$$

6.2.3 Newton-Verfahren bei Polynomen

Zusatzbemerkung. Bei Polynomen kann man einen Kreis um den Nullpunkt angeben, in dem alle Nullstellen liegen.

Zusatzbemerkung. Manchmal weiß man, dass alle Nullstellen eines Polynoms reell sind (Eigenwertberechnung von symmetrischen Matrizen), dann konvergiert das *Newton-Verfahren* mit genügend kleinem Startpunkt gegen die kleinste Nullstelle.

6.3 Konvergenzverhalten von Iterationsverfahren

6.3.1 Konvergenz der Ordnung p

Zusatzdefinition. Definition eines *Iterationsverfahren* von der Ordnung p .

$$d(x^*, x_{k+1}) \leq K(d(x^*, x_k))^p, \quad K < 1 \text{ für } p = 1$$

Zusatzsatz. Sei $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ p -mal stetig diffbar. Ist $F'(x^*) = \dots = F^{(p-1)}(x^*) = 0$ und $F^{(p)}(x^*) \neq 0$, so hat das *Iterationsverfahren* die Ordnung p , falls $p \geq 2$ und 1, falls $p = 1$ und $|F'(x^*)| < 1$ ist.

BEWEIS: Taylorentwicklung um x^* . □

Zusatzbemerkung. Bei Verfahren der Ordnung $p > 1$ muss man darauf achten, dass der Startpunkt genügend nahe bei x^* liegt, da nur lokale Konvergenz vorliegt.

6.4 Konstruktion von Verfahren höherer Ordnung

Zusatzbemerkung. Gegeben sei ein Iterationsverfahren, das nur die Konvergenzordnung $p = 1$ besitzt, dann beschleunigt die Δ^2 -Methode von Atiken die Konvergenz.

$$y_k = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k}$$

Zusatzbemerkung. Verwendet man im Verfahren von Atiken stets die neueste Information so erhält man das *Verfahren von Steffensen* (y_k hat dann höhere Ordnung).

6.4.1 Numerische Bedeutung des Ordnungsbegriffes

- Für $p = 1$ wird die Differenz in jedem Schritt um den Faktor K verkleinert
- Für $p \geq 2$ wird ab einer gewissen Genauigkeit in jedem Schritt die Genauigkeit um p -Stellen verbessert.

6.5 Weitere Iterationsverfahren

6.5.1 Sekantenmethode

Zusatzdefinition. Definition der *Sekantenmethode*. (Keine Ableitung notwendig)
Man beginnt mit zwei Punkten und bildet nicht die Tangente sondern die Sekante und bestimmt die Nullstelle der Interpolationsgeraden und iteriert dies dann.

6.5.2 Konvergenzeigenschaft der Sekantenmethode

Zusatzbemerkung. Die Sekantenmethode konvergiert nur lokal mit Konvergenzordnung $p = 1.618, \dots$

6.5.3 Regula falsi

Sei $f \in C[a, b]$.

- Man finde zunächst zwei Punkte mit unterschiedlichem Vorzeichen (Wegen der Stetigkeit liegt eine Nullstelle dazwischen).
- Als neuen Punkt fügt man die Nullstelle der Interpolationsgeraden durch beide Punkte hinzu und iteriert weiter mit dem Punkt aus den vorherigen, dessen Funktionswert ein unterschiedliches Vorzeichen hat zum Funktionswert in der Nullstelle hat.

Zusatzbemerkung. Die Regula falsi ist global konvergent mit Konvergenzordnung $p = 1$.

7 Matriceigenwertaufgaben

7.1 Charakteristisches Polynom

Zusatzdefinition. Definition des *charakteristischen Polynoms* ($\det(A - \lambda I)$), *Eigenvektoren*, *geometrische Vielfachheit*, *algebraische Vielfachheit*.

7.2 Konditionierung des Eigenwertproblems

7.2.1 Gerschgorinkreise

Zusatzlemma. Es sei lub eine Grenznorm einer Vektornorm. Ist B eine beliebige $n \times n$ Matrix, so gilt für alle Eigenwerte λ von A : $\text{lub}((\lambda I - B)^{-1}(A - B)) \geq 1$, falls λ nicht auch Eigenwert von B ist.

BEWEIS: Grenznorm größer als Quotienten zu speziellem Wert (Eigenvektor von A). \square

Zusatzsatz. (a) Für alle Eigenwerte λ von A und jede Grenznorm gilt $|\lambda| \leq \text{lub}(A)$.

(b) (Gerschgorin-Kreise) Alle Eigenwerte von A liegen in

$$\bigcup_{j=1}^n K_j, \quad K_j := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{jk}| \right\}$$

(c) Alle Eigenwerte von A liegen in

$$\bigcup_{k=1}^n K_k, \quad K_k := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{jk}| \right\}$$

BEWEIS: 1. $B = 0$ in Lemma, 2. $B = \text{diag}(a_{jj})$ und Maximumsnorm. 3. A und A^T haben gleiche Eigenwerte. \square

Zusatzbemerkung. Für diagonaldominante Matrizen mit positiver Diagonale folgt so z. B. die positive Definitheit.

Zusatzbemerkung. Ist ein Teil der Gerschgorinkreise disjunkt zu den andern, so liegen genau so viele in diese Menge, wobei die algebraischen Vielfachheiten gezählt werden.

Zusatzdefinition. Definition des *Rayleigh-Quotienten* und dessen Eigenschaften.

7.2.2 Störungssatz

Zusatzdefinition. Definition einer *absoluten* Grenznorm (z. B. $\text{lub}_1, \text{lub}_2, \text{lub}_\infty$).

Zusatzsatz. *Es sei lub eine absolute Grenznorm. Es sei A eine diagonalisierbare $n \times n$ Matrix, also $T^{-1}AT = D$ mit einer Matrix T , deren Spalten Eigenvektoren von A sind. Sei B eine beliebige $n \times n$ Matrix. Dann gilt:*

$$|\lambda(B) - \lambda(A)| \leq \text{cond}(T) \text{lub}(A - B)$$

BEWEIS: Einsetzen und Anfangslemma. □

Zusatzbemerkung. Eine Normale Matrix ist unitär diagonalisierbar und $\text{cond}(T) = 1$. Generell gehen Rundungsfehler nur linear ein. Falls eine Matrix nicht diagonalisierbar ist, so ist das Eigenwertproblem schlecht konditioniert.

7.3 Iterative Verfahren

7.3.1 Potenzmethode

Satz 7.3.1 (Vektoriteration nach v. Mises). *Es gebe einen betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda_1 = \dots = \lambda_r$ und die Matrix A sei diagonalisierbar. Dann gilt für einen passenden Startvektor x_0 und die Iteration $x_k = Ax_{k-1} = A^k x_0$*

$$\frac{\|x^{k+1}\|_\infty}{\|x^k\|_\infty} = |\lambda_1| + \mathcal{O}\left(\frac{|\lambda_{r+1}|^k}{|\lambda_1|^k}\right).$$

BEWEIS: Für Diagonalisierbare Matrizen gibt es eine Basis aus Eigenvektoren θ_i . Hat der Startvektor die Darstellung $x_0 = x^* + \alpha_{r+1}\theta_{r+1} + \dots + \alpha_n\theta_n$ mit einem Eigenvektor x^* von λ_1 . So wächst der erste Term schneller als alle anderen (Eigenvektoren und λ_1 größter). □

Zusatzbemerkung. Hat man einen betragsmäßig größten Eigenwert gefunden, so betrachtet man $A' = A - mI$ mit $m > \lambda_1$, der die Eigenwerte $\lambda_j - m$ besitzt.

Zusatzbemerkung. Kennen wir bereits eine gute Näherung μ_1 zu einem Eigenwert λ_1 von A und ist A diagonalisierbar, so betrachten wir die Matrix $(A - \mu_1 I)^{-1}$, die ebenfalls diagonalisierbar ist mit gleichen Eigenvektoren aber Eigenwerten $\frac{1}{\lambda_1 - \mu_1}$. Dann wieder Mises.

7.4 Reduktionsmethode

7.4.1 Jordannormalform

Zusatzdefinition. Definition der *Jordanschen Normalform*, *digonalisierbar*.

(Basis aus Eigenvektoren, Beispiele: Reell symmetrische Matrizen, hermitesche Matrizen, Matrizen mit n Eigenwerten, normale Matrizen, unitäre Matrizen.)

7.4.2 durch Ähnlichkeitstransformation, Konditionierung der Ähnlichkeitstransformation, z. B. Householder

Zusatzdefinition. Definition einer oberen Hessenberg-Matrix und Ähnlichkeit.

Zusatzbemerkung. Eine Überführung in eine ähnliche obere Hessenberg-Matrix ist in endlich vielen Schritten möglich. Bei einer Dreiecksmatrix sind im Allgemeinen unendlich viele notwendig. Man verwendet unitäre Matrizen, um eine gute Konditionierung zu gewährleisten.

Zusatzsatz. Eine hermitesche Matrix A lässt sich auf Tridiagonalgestalt bringen durch das Verfahren von Householder.

BEWEIS: Householdermatrix, so dass ab 3. Eintrag alle eliminiert werden $A_1 = U_1 A U_1^H$ ist auch hermitesch. Dann iterieren. \square

Zusatzsatz. Eine hermitesche Matrix A lässt sich auf Tridiagonalgestalt bringen durch das Verfahren von Givens.

BEWEIS: In der Givensrotation (cos und sin als Quadrat in Eliminationskomponenten) den Winkel so wählen, das das entsprechende Element neutralisiert wird. \square

Zusatzbemerkung. Das Householder-Verfahren und das Givens-Verfahren können auch auf nicht-hermitesche Matrizen angewendet werden. Diese Verfahren sind dann numerisch stabiler, aber ihre Komplexität ist größer als das folgende Verfahren.

Zusatzsatz. Eine beliebige Matrix lässt sich mithilfe von Permutations- und Frobenius-Matrizen auf eine ähnliche obere Hessenberg-Matrix transformieren.

BEWEIS: Wie Gauß (mit Pivotisierung) nur beginnt bei Element (3, 1) und mit Ähnlichkeitstransformation $A_2 = F_1 P_1 A_1 P_1 F_1^{-1}$. \square

Zusatzbemerkung. Der Aufwand ist etwa doppelt so hoch wie bei Gauss (ohne Ähnlichkeit).

7.5 Eigenwertproblem für Hessenberg- oder Tridiagonalmatrizen

7.5.1 LR Zerlegung

Zusatzbemerkung. Verfahren vergleichbar zum QR-Verfahren, aber nicht immer durchführbar, da LR-Zerlegung nicht immer existiert.

7.5.2 QR Zerlegung

Zusatzbemerkung. Es ist sinnvoll, die Matrix erst auf eine obere Hessenberg-Matrix B zu transformieren und dann das QR-Verfahren anzuwenden.

Zusatzdefinition. Ablauf des *QR-Verfahrens*.

Setze $B_0 := B$ und bilde die QR-Zerlegung $B_k = Q_k R_k$ von B_k . Definiere dann $B_{k+1} := R_k Q_k$ und es ist ähnlich zu B_k : $B_{k+1} = Q_k^H Q_k R_k Q_k = Q_k^H B_k Q_k$.

Satz 7.5.1. Ist B_k eine obere Hessenberg Matrix, so auch B_{k+1} .

BEWEIS: Man verwendet für die QR-Zerlegung Givensrotationen und erhält die Darstellung $B_1 = R_0 \Omega_{21}^H \cdots \Omega_{n,n-1}^H$, die eine Hessenbergmatrix ist. \square

Zusatzsatz. Die obere Hessenbergmatrix B (oder allgemeine) erfülle die Voraussetzungen $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$. Dann konvergieren die Diagonaleinträge der Matrizen B_k gegen die Eigenwerte.

Zusatzbemerkung. Haben zwei Eigenwerte die gleichen Beträge so konvergieren die Eigenwerte einer 2×2 Diagonaluntermatrix aber nicht die Matrix selbst.

7.5.3 Charakteristisches Polynom einer Hessenbergmatrix

Zusatzdefinition. Definition von *zerlegbar* bzw. *unzerlegbar*.

Zusatzbemerkung. Man kann annehmen, dass alle unteren Nebendiagonalelemente ungleich Null sind (also unzerlegbar), da man sonst eine Blockmatrix erhält, für die man getrennt die Determinante (oder das Char.poly) ausrechnen kann.

Zusatzsatz. Die Eigenwerte einer oberen Hessenbergmatrix kann man mit dem Newton-Verfahren angewandt auf das charakteristische Polynom $\phi(\lambda)$ anwenden. Für den Bruch aus $\phi(\lambda)$ und $\phi'(\lambda)$ gelten dabei Rekursionsformeln.

BEWEIS: Herleitung der Rekursionsformeln aus einem LGS $(B - \lambda I)x = \alpha e_1$ mit festem $x_n := 1$. $\Rightarrow \alpha$ Mit der Cramerschen Regel für $x_n = 1$ folgt dann Darstellung von $\phi(\lambda)$ analog für $\phi'(\lambda)$. \square

7.5.4 Charakteristisches Polynom einer symmetrischen Tridiagonalmatrix

Zusatzbemerkung. Man kann annehmen, dass alle Nebendiagonalelemente ungleich Null sind, da man sonst eine Blockmatrix erhält, für die man getrennt die Determinante (oder das Char.poly) ausrechnen kann. Außerdem sind alle Eigenwerte reell (da hermitesch).

Zusatzsatz. Für das charakteristische Polynom $\phi(\lambda) = p_n(\lambda)$ einer unzerlegbaren symmetrischen Tridiagonalmatrix gilt die folgende Rekursionsformel

$$p_i(\lambda) = (\sigma_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - |\gamma_i|^2 p_{i-2}(\lambda).$$

Ebenso erhält man durch Ableiten eine Rekursion der Ableitung. Ebenso besitzt jede unzerlegbare hermitesche Tridiagonalmatrix n verschiedene reelle Eigenwerte.

BEWEIS: Rekursion nach Entwicklung nach i -ter Zeile. Aus Rekursion leitet man Vektor der Charpolyordnungen her und der größer Null ist und sich aus Ableitung des Charpolys in den Eigenwerten schreiben lässt (die ungleich Null \Rightarrow Einfach). \square

Zusatzbemerkung. Aufwand ist dann nur noch $\mathcal{O}(n)$, d.h. es lohnt sich die Matrix vorher auf Tridiagonalgestalt zu bringen. Außerdem lassen sich die Nullstellen des Char.polys nun mit den Newton-Verfahren finden (reell, verschieden, Funktionswert und Ableitung bekannt).

8 Iterative Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Zusatzbemerkung. Der Vorteil ist, dass die Matrix meist nie explizit aufgestellt werden muss, sondern die Iterationen zur Lösung direkt aus den Rekursionsformeln ausgerechnet werden kann.

8.1 Fixpunktiteration

Idee. Man formt das LGS $Ax = b$ äquivalent um in eine Fixpunktgleichung $x = Cx + d$ und berechnet dann sukzessive ausgehend von einem Startpunkt $x^{k+1} = Cx^k + d$.

Ein C erhält man beispielsweise durch eine nichtsinguläre Matrix B und die Umformung $Bx = (B - A)x + b \Leftrightarrow x = (I - B^{-1}A)x + B^{-1}b$.

8.1.1 Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren

Ab jetzt habe $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ Diagonalelemente ungleich Null.

Zusatzsatz. Mit der Diagonalmatrix $B := D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ erhält man mit $C = I - D^{-1}A$ das Gesamtschritt- oder Jacobi-Verfahren.

Zusatzsatz. Mit der Unterendreiecksmatrix B von A erhält man mit $C = I - B^{-1}A$ das Einzelschritt- oder Gauß-Seidel-Verfahren. (Es wird beim Einzelschrittverfahren stets der neueste x_j -Wert verwendet).

8.1.2 Konvergenz, Spektralradius

Zusatzdefinition. Definition des *Spektralradius* $\rho(C)$ und der *Konvergenz* eines Iterationsverfahrens (Beurteilung z. B. mittels Gerschgorin möglich)

Zusatzsatz. Das Iterationsverfahren $x_{k+1} = Cx_k + d$ ist genau dann konvergent wenn $\rho(C) < 1$.

BEWEIS: Man verwendet die Jordansche-Normalform. Für den Fehlervektor $z_k := x_k - x$ gilt $z_k = C^k z_0$, wobei der Grenzwert der Jordankästchen J^k für $\rho(C) < 1$ gegen Null konvergiert, also auch der Fehler. \square

Zusatzkorollar. Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm in \mathbb{C}^n und lub seine Grenznorm. Ist $\text{lub}(C) < 1$, so konvergiert das Iterationsverfahren.

Zusatzbemerkung. Für das Iterationsverfahren erhält man im schlechtesten Fall pro Iterationsschritt eine Verbesserung um $\rho(C)$. (Also möglichst kleiner Spektralradius gut).

Zusatzdefinition. Definition des *starken/schwachen Zeilensummenkriteriums* und des *starken/schwachen Spaltensummenkriteriums*.

Zusatzbemerkung. Bei diesen Kriterien gilt für die Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahrens $\text{lub}_\infty(C) < 1$ (Zeilen) bzw. $\text{lub}_\infty(C^T) < 1$ (Spalten) und demnach $\rho(C) < 1$ und das Gesamtschrittverfahren konvergiert.

Zusatzdefinition. Definition einer *unzerlegbaren* Matrix.

Zusatzsatz. Es sei A eine unzerlegbare $n \times n$ Matrix. Erfüllt A das schwache Zeilensummenkriterium oder das schwachen Spaltensummenkriterium, dann konvergiert das Gesamtschrittverfahren und das Einzelschrittverfahren.

Zusatzbemerkung. Verfahren mit kleinem Spektralradius konvergieren schnell, dann ist jedoch die Berechnung schwerer, da $B \approx A$, man versucht so den Spektralradius der Iterationsmatrix zu verkleinern (schnellere Konvergenz).

8.1.3 Relaxationsverfahren

Man wählt einen *Relaxationsparameter* ω und setzt $B := \frac{1}{\omega}D$ im Gesamtschrittverfahren und analog im Einzelschrittverfahren. Man versucht so den Spektralradius zu verkleinern.

8.2 Abstiegsverfahren, Gradientenverfahren

Idee. Man benötigt eine pos. definite Matrix und es gilt: $Ax^* = b \Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle - \langle b, x \rangle \Leftrightarrow \min F(x)$. Man verwendet dann die Iteration: $x_{k+1} = x_k + r_k$. Im Gradientenverfahren wählt man die Suchrichtung r_k entlang des negativen Gradienten $-\Delta F(x_k)$.

8.2.1 Modellproblem

Beispielsweise partielle DGL (Membran / Diskretisierung).

9 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

9.1 Anfangswertaufgaben, AWA

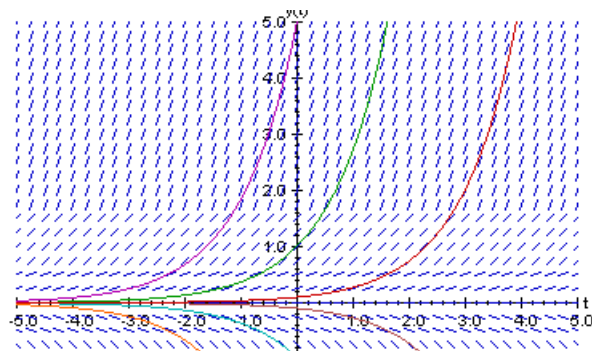
Zusatzdefinition. Definition einer *gewöhnlichen* DGL, *Ordnung*, *explizite Form*, *Anfangswertproblem*.

$$y^{(m)} = G(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x)), \quad y(a) = \alpha_0, \dots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_{m-1}, \quad a \leq x \leq b$$

Zusatzbemerkung. Jede DGL der Ordnung m lässt sich in ein System von DGLen der Ordnung 1 überführen.

9.2 Theorie

9.2.1 Vektorfeld



9.2.2 Existenzsatz von Peano

Zusatzsatz (Satz von Peano). *Es sei $y' = f(x, y), y(a) = y_0$ ein AWP und die Funktion sei stetig. Dann gibt es zu jedem AWP wenigstens eine lokale Lösung.*

BEWEIS: Mithilfe des Eulerschen Polygonzugverfahrens erhält man eine Näherungslösung, die für kleineres h gegen die Lösung konvergiert. Diese enthält eine gleichmäßig konvergente Teilfolge (Arzela-Ascoli), deren Grenzwert dann stetig ist und die Grenzfunktion erfüllt $y(x) = y_0 + \int_a^x f(s, y(s)) ds$, dann HS der Diff- und Intrechnung. \square

9.2.3 Eindeutigkeit

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(a) = y_0 \Leftrightarrow y(b) - y(a) = \int_a^b f(x, y(x)) dx$$

Zusatzsatz (Satz von Picard-Lindelöf). *Jedes Anfangswertproblem einer Differentialgleichung, das die Lipschitz-Bedingung $\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq K\|y_1 - y_2\|$ erfüllt, kann lokal eindeutig gelöst werden.*

BEWEIS: Verwende die Iterationsfunktion $F[u](x) := y_0 + \int_a^x f(t, u(t))dt$ und zeige mit der Trivialen Abschätzung und Lipschitz-Bedingung $d_\infty(F(u), F(v)) \leq (b-a)Kd_\infty(u, v)$.

\square

9.3 Numerik

Zusatzbemerkung. Wir betrachten DGL der Form $y'(x) = f(x, y(x))$, $a \leq x \leq b$, $y(a) = y_0$. Diese lassen sich direkt auf höhere Dimensionen und damit auf höhere Ordnung übertragen.

9.4 Explizite Einschrittmethoden

Zusatzdefinition. Definition eines *expliziten Einschrittverfahrens mit konstanter Schrittweite* h .

$$\eta_0 = y_0, \quad x_{k+1} = x_k + h, \quad \eta_{k+1} = \eta_k + h \cdot \phi(x_k, \eta_k, h, f)$$

9.4.1 Polygonzugverfahren

Idee. Wir unterteilen des Intervall $[a, b]$ äquidistant und berechnen die Näherungen η_{k+1} für $y(x_{k+1})$ aus $\eta_0 = y_0$, $x_{k+1} = x_k + h$ und $\eta_{k+1} = \eta_k + h \cdot f(x_k, \eta_k)$.

BEWEIS: Entwicklung der Funktion y an der Stelle a und Abbruch nach linearem Term. Analoges Verfahren für Abbruch nach quadratischem Term, dann aber mit Ableitungen.

□

9.4.2 Diskretisierungsfehler

Zusatzdefinition. Definition des *lokalen Diskretisierungsfehlers* τ .

$$\tau(x, \eta, h, f) = \frac{z(x+h) - z(x)}{h} - \phi(x, \eta, h, f)$$

9.4.3 Konsistenz, Konsistenzordnung

Zusatzdefinition. Definition von *konsistent* und der *Konsistenzordnung*.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(x, \eta, h, f) = 0, \quad \text{und somit} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \Phi(x, \eta, h, f) = f(x, \eta) \quad |\tau(x, \eta, h, f)| \leq M_f h^p$$

für alle Funktionen in $[a, b]$, deren partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq p$ stetig und beschränkt sind.

Zusatzbemerkung. Das Polygonzug-Verfahren hat die Ordnung 1, das Verbesserte hat die Ordnung 2. (Beweis mit Taylor)

9.4.4 Runge-Kutta-Formeln

Idee. Man Berechnet nun das Integral mit einer Quadraturformel macht also den Ansatz (ohne Ableitungen): $\Phi(x, \eta, h, f) = \gamma_1 f(x, \eta) + \gamma_2 f(x + \alpha_2 h, \eta + h\beta_2 f(x, \eta))$ und versucht ein Verfahren höherer Ordnung zu erhalten. Und entwickelt dies mehrdimensional nach Taylor und vergleicht dies mit der Taylorentwicklung von $\frac{z(x+h)-z(x)}{h}$ aus dem lokalen Diskretisierungsfehler um eine gewünschte Ordnung zu erhalten.

Zusatzbemerkung. Man erhält:

- (a) Für die Ordnung 2 das Verfahren von *Heun* (2 Funktionsauswertungen)
- (b) Für eine alternative Ordnung 2 das *modifizierte Euler-Verfahren*
- (c) Für die Ordnung 4 das *Standard-Runge-Kutta-Verfahren* (4 Funktionsauswertungen) (\cong Herleitung mit Simpsonregel, falls $f(x, y)$ nicht von y abhängt)

Zusatzbemerkung. Explizite ESV haben den Vorteil, dass keine Startvorbereitung notwendig ist, eine hohe Ordnung vorliegt, keine Ableitungen berechnet werden müssen und eine Schrittweitensteuerung möglich ist.

9.5 Lokale und globale Konvergenz

Zusatzdefinition. Definition des *globalen Diskretisierungsfehlers*.

Zusatzsatz. *Es sei ein ESV der Ordnung p gegeben. Es seien h_0 und γ positive Zahlen, so dass in der Menge $\{(x, \eta, h) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, |\eta - y(x)| \leq \gamma, 0 < h < h_0\}$ die Funktion Φ einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es ein h_1 mit $0 < h_1 \leq h_0$, so dass für alle $h \leq h_1$ der globale Diskretisierungsfehler der Abschätzung genügt (M_f aus Ordnung, M aus Lipschitzbed.)*

$$|e(x_k, h)| = |\eta_k - y(x_k)| \leq \frac{M_f h^p}{M} \left(e^{M(x_k - x_0)} - 1 \right)$$

BEWEIS: $|y_{j+1} - \eta_{j+1}|$ Dreiecksungleichungserweitern auf lok. Diskred.fehler. Dann Iterieren. Alternativ auch mit Grönwall'scher Ungleichung. \square

Zusatzbemerkung. Der lokale Diskretisierungsfehler hat die gleiche Ordnung wie der globale.

Zusatzsatz (Asymt. Entwicklung des glob. Diskretisierungsfehlers). *Seien p und m natürliche Zahlen $p \leq m$ und ein ESV der Ordnung p gegeben und $f \in \mathcal{F}_{m+2}(a, b)$. Dann gilt*

$$e(x, h) := \eta_k - y(x) = h^p e_p(x) + h^{p+1} e_{p+1}(x) + \dots + h^m e_m(x) + h^{m+1} E_{m+1}(x, h),$$

wobei die Funktionen e_i nicht von h abhängen und das Restglied beschränkt ist für festes x und an der Stelle $x_0 = a$ alle Funktionen den Wert Null besitzen.

9.6 Schrittweitenkontrolle

Idee. Gesucht ist zu einem ESV der Ordnung p eine Schrittweite $h > 0$, sodass $|\eta_2(h) - y(x_0 + 2h)| \approx \epsilon$.

Man berechnet die beiden Werte $\eta_1(H)$ und $\eta_2(H/2)$ und bestimmt

$$\frac{H}{h} \approx \left| \frac{2[\eta_1(H) - \eta_2(H/2)]}{(1 - 2^{-p})\epsilon} \right|^{1/(p+1)} =: \kappa_H, \text{ wobei } h \text{ die Bedingung erfüllt}$$

Das gewählte H entspricht den Anforderungen, wenn $2h \approx H$ also $\kappa_H \approx 2$

BEWEIS: Entwicklung von $\eta_1(H) - y(x_0 + H)$ und $\eta_2(H/2) - y(x_0 + H)$ nach vorherigem Satz und Entwicklung des Auftretenden $e_p(x)$ nach Taylor $\Rightarrow e'_p(x_0)$. Entwicklung von $\eta_2(h) - y(x_0 + 2h)$ mit Verwendung von $e'_p(x_0)$ liefert Darstellung. \square

Zusatzbemerkung. In der Praxis ist bei $\kappa_H > 3$ die Schrittweite zu groß und man wählt $H_{neu} = \frac{H}{\kappa_H}$ und testet erneut. Andernfalls akzeptiert man den Näherungswert $\eta_2(H/2)$ für $y(x_0 + H)$.

9.7 Numerische Stabilität

Zusatzbemerkung. Der Gesamtfehler eines Einzelschrittverfahrens wird zunächst für kleiner werdendes $|h|$ kleiner, falls man aber $|h|$ zu klein wird, so wird aufgrund der Rundungsfehler der Gesamtfehler wieder größer. Man verwendet dann auch Mehrschrittverfahren (explizit und implizit) oder Prädiktor-Korrektor Verfahren.

9.7.1 Stabilitätsgebiete

Zusatzdefinition. Das *Stabilitätsgebiet* ist die Menge der komplexen Zahlen $\eta = \delta t \cdot \lambda$, für die das Verfahren bei der Testgleichung $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, bei fester Schrittweite eine monoton fallende Folge von Näherungen liefert.

9.8 Extrapolationsmethode

Zusatzbemerkung. Man nutzt ähnlich wie im Romberg-Verfahren die Entwicklung des Diskretisierungsfehlers um Verfahren höherer Ordnung zu konstruieren.

9.8.1 Gragg-Stoer-Bulisch

Zusatzbemerkung. Die Extrapolationsmethode ist dann besonders effektiv, wenn in der Entwicklung des Diskretisierungsfehlers nur gerade h -Potenzen vorkommen wie beispielsweise beim nächsten Verfahren.

Zusatzdefinition. Definition der *expliziten* und *impliziten Mehrschrittverfahren*.

Zusatzsatz (Gragg-Verfahren). Der Näherungswert $S(\bar{x})$ von $y(\bar{x})$ für $\bar{x} := x_0 + H = x_0 + nh$ berechnet sich aus:

$$\begin{aligned}\eta_0 &:= y_0 \\ \eta_1 &:= \eta_0 + hf(x_0, \eta_0) \\ \eta_{j+1} &:= \eta_{j-1} + 2hf(x_j, \eta_j), \text{ für } j = 1, \dots, n-1 \text{ (Midpoint-Rule)} \\ S(\bar{x}) &:= \frac{1}{2} [\eta_n + \eta_{n-1} + hf(x_n, \eta_n)].\end{aligned}$$

Die Fehlerentwicklung enthält nur gerade h -Potenzen.

Zusatzbemerkung. Man berechnet nun für $h_1 = H/2$, $h_2 = H/4$, $h_3 = H/6 \dots$ die Werte von $S(\bar{x})$ und berechnet daraus jeweils mit Hilfe von Interpolationsformeln ein Tableau von weiteren Werten, bis man ein hinreichend genauen Schätzwert erhalten hat.

9.9 Lineare Randwertaufgaben

Zusatzdefinition. Definition eines *Randwertproblems für gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung*.

$$y''(x) = g(x, y(x), y'(x)), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad a \leq x \leq b$$

Zusatzbemerkung. RWP müssen nicht immer eine Lösung besitzen und eine Lösung muss nicht eindeutig sein.

9.9.1 Einfache Schießmethoden

Idee. Wir setzen voraus, dass das Anfangswertproblem $y''(x) = g(x, y(x), y'(x))$, $y(a) = \alpha, y'(a) = s$, $a \leq x \leq b$ für jedes s eine eindeutige Lösung besitzt. Zu gegebenen $s \in \mathbb{R}$ berechnen wir dann mit Hilfe eines der vorherigen Verfahren die Werte $y_s(b)$ und $y'_s(b)$ (Äquivalent zu einem System zweier Differentialgleichungen, die das liefern). Dann suchen wir die Nullstelle s^* der Funktion (z. B. mit Newton oder Regula falsi)

$$F(s) := y_s(b) - \beta, \quad s \in \mathbb{R}$$

9.9.2 Mehrfachschießmethode

Man betrachtet ein allgemeineres Randwertproblem $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$, $\mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = \mathbf{0}$.

Entweder möchte man die Werte $\mathbf{y}(x_k) \in \mathbb{R}^m$ an vorgegebenen Knoten berechnen und erhält nun mehrere Anfangswertprobleme, oder man bestimmt Vektoren so, dass eine zusammengesetzte Funktion stetig ist und die Randbedingungen erfüllt.