Skriptum

Topologie

Definitionen und Sätze

1 Metrische Räume

Definition 1.1. Definition einer *Metrik*.

Beispiel 1.2. (a) Diskrete Metrik

(b) Euklidische Metrik

(c) Hamming-Metrik

(d) Metrik nach Frechet

Definition 1.3. Definition von Sphären, Bällen und offenen und abgeschlossenen Mengen

Beispiel 1.4. (a) Offener Ball ist offen

(b) Standardsphäre $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$

(c) Aussehen der Sphären in $\mathbb{R}^2$.

Definition 1.5. ϵ und δ Definition der Stetigkeit

Satz 1.6. *Eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen metrischen Räumen X, X' ist genau dann stetig, wenn gilt: für jede offene Teilmenge A von X' ist das Urbild offen in X.*

Beobachtung 1.7. *In jedem metrischen Raum (X, d) gilt:*

(a) X und $\emptyset$ sind offen.

(b) Jede Vereinigung von offenen Mengen ist offen.

(c) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.

Lemma 1.8. *Die offenen Teilmengen der euklidischen Gerade $\mathbb{R}$ sind genau die Vereinigungen von endlich oder abzählbar vielen offenen, paarweise disjunkten Intervallen, einschließlich $\mathbb{R}$ und $\emptyset$.*

2 Topologische Räume und stetige Abbildungen

Definition 2.1. Definition einer *Topologie*

Beispiel 2.2. (a) Natürliche Topologie es $\mathbb{R}^n$

(b) Diskrete Topologie

(c) Antidiskrete Topologie

(d) Kofinite Topologie

(e) Unnatürliche Topologie auf $\mathbb{R}$: $\mathcal{O} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}$

(f) Ordnungstopologie auf linear geordneten Räumen

(g) Relativtopologie oder induzierte Topologie eines Teilraumes

Definition 2.3. Definition der Stetigkeit in allgemeinen topologischen Räumen. Definition einer *offenen* Abbildung und Definition des *Homöomorphismus* (bijektiv, stetig und Umkehrfunktion stetig $\Leftrightarrow$ bijektiv stetig und offen).

Beispiel 2.4. (a) Falls $f : X \to X'$ konstant ist oder X diskret ist oder X' antidiskret ist, dann ist f stetig

(b) Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig, aber nicht notwendig offen oder abgeschlossen

(c) Angabe einiger Homöomorphismen in $\mathbb{R}$

Zusatzbemerkung. (a) Kompositionen stetiger Abbildungen sind stetig

(b) Einschränkungen stetiger Abbildungen sind stetig

Definition 2.5. Definition von Umgebung, Umgebungssystem, Berührpunkt, $\bar{A}$, innerer Punkt, $\mathring{A}$, $\partial A := \bar{A} \backslash \mathring{A}$.

Lemma 2.6. *Lemma aus der Übung*

Definition 2.7. Definition der Stetigkeit in einem Punkt

Lemma 2.8. *Eine Abbildung zwischen top. Räumen ist genau dann stetig, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.*

Definition 2.9. Definition einer *Basis* und einer *Subbasis*

Beispiel 2.10. Die Bälle bilden eine Basis für die Topologie eines metrischen Raums, also die Intervalle (a, b) mit $a, b \in \mathbb{Q}$ für $\mathbb{R}$ und die offenen Halbgeraden bilden eine Subbasis. Die Mengen der Form $X \backslash \{x\}$ bilden eine Subbasis für die kofinite Topologie.

Lemma 2.11. *(a) Sei $\mathcal{B} \subset 2^X$ mit $\bigcup \mathcal{B} = X$ und $B, B' \in \mathcal{B}, x \in B \cap B' \Rightarrow \exists B'' \in \mathcal{B} : x \in B'' \subset B \cap B'$.*
Dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis für genau eine Topologie, nämlich $\mathcal{O} := \{\bigcup B' : B' \subset \mathcal{B}\}$

(b) Sei $\gamma \subset 2^X$ beliebig. Dann ist es eine Subbasis für genau eine Topologie auf X, die endlichen Schnitte bilden eine Basis dieser Topologie.

Abzählbarkeitsaxiome 2.12. *Ein top. Raum erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn eine abzählbare Basis existiert.*

Er erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn das Umgebungssystem jedes Punktes eine abzählbare Umgebungsbasis enthält.

Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Er hat genau dann eine Abzählbare Basis, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Insbesondere hat $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis.

3 Produkte und Quotienten

Definition 3.1. Definition des Produktraums ($X = \prod_{i \in I} X_i$) und der Produkttopologie. Dazugehörige Projektion. Und Subbasis $\{p_i^{-1}(O_i) | i \in I, O_i \in \mathcal{O}_i\}$.

Basis der Produkttopologie für endliche Produkte.

Beispiel 3.2. (a) Produkte offener Intervalle in $\mathbb{R}$ bilden eine Basis für die Produkttopologie von $\mathbb{R}^n$, die mit der natürlichen Topologie zusammenfällt.

(b) Kreislinie, Zylinder, Torsus

(c) Cantormenge

Lemma 3.3. *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ der Produktraum der topologischen Räume X_i*

(a) Jede Projektion $p_i : X \to X_i$ ist stetig und offen

(b) Eine Abbildung $g : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann stetig, wenn alle Koordinatenabbildungen $p_i \circ g : Y \to X_i$ stetig sind.

Zusatzbemerkung. Unter allen Topologieen auf der Produktmenge, welche die Projektionen stetig machen, ist die Produkttopologie die gröbste, d.h. die mit den wenigsten offenen Mengen.

Projektionen sind nicht immer abgeschlossene Abbildungen.

Definition 3.4. Definition der topologischen Gruppe.

Definition 3.5. Definition der Quotiententopologie, Identifikationsabbildung, kanonische Projektion, Quotientenraum.

Beispiel 3.6. (a) $[0, 1]$ mit $1 \sim 0$ ist homöomorph zu $\mathbb{S}^1$

(b) Zylinder

(c) Möbiusband

(d) Torsus

(e) Kleinsche Flasche

Lemma 3.7. *Sei $q : X \to Y$ eine Identifikationsabbildung. Eine Abbildung $f : Y \to Z$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ q : X \to Z$ stetig ist.*

Korollar 3.8. *Sei $f : X \to Y$ eine identifizierende Abbildung zwischen topologischen Räumen X, Y. Ferner sei $\sim$ auf X definiert durch $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ für $x, y \in X$, und $q : X \to X/_\sim$ die zugehörige kanonische Projektion. Dann ist*

$$\bar{f} : X/_\sim \to Y : [x] \mapsto f(x)$$

ein wohldefinierter Homöomorphismus, also $X/_\sim \approx Y$, und es gilt $f = \bar{f} \circ q$.

Lemma 3.9. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Surjektion. Ist f offen oder abgeschlossen, so ist f eine Identifikationsabbildung.*

Beispiel 3.10. (a) Beweis vorheriger Beispiele für Kreis, Zylinder, usw.

(b) Projektiver Raum

(c) Kegel, Doppelkegel

Definition 3.11. Definition des Homogenen Raums $G/_{\sim}$ oder $G/_{H}$

Beispiel 3.12. (a) $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \approx \mathbb{S}^1$

(b) $\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}$

(c) Grassmann-Mannigfaltigkeit

Definition 3.13. Definition von Summe und Verklebungsraum.

Beispiel 3.14. (a) Kegel

(b) Projektiver Raum

(c) CW-Komplexe

4 Zusammenhang

Definition 4.1. Definition von zusammenhängend und wegzusammenhängend.

Beispiel 4.2. (a) Zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle

(b) $\mathbb{Q}$ und die Cantormenge sind nicht zusammenhängend

(c) Beispiel eines zusammenhängenden, aber nicht wegzusammenhängenden Raums

Lemma 4.3. *(a) X zush. $\Leftrightarrow$ es existiert keine stetige Surjektion $f : X \to \{0,1\}_{diskret}$ $\Leftrightarrow$ jede solche stetige Abbildung ist konstant.*

(b) Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.

(c) Überlappende (weg-)zusammenhängende Räume sind (weg-)zusammenhängend

(d) Ist X (weg-)zusammenhängend, und f stetig so ist auch $f(X)$ (weg-)zusammenhängend

Korollar 4.4 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(X)$ ein Intervall.*

Proposition 4.5. *Ein top. Raum ist genau dann wegzusammenhängend, wenn X zusammenhägnend ist und jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung hat.*

Korollar 4.6. *Jede offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend.*

Definition 4.7. Definition von Zusammenhangskomponente und total unzusammenhängend.

Lemma 4.8. *(a) Die Zusammenhangskomponenten von X bilden eine Partition von X.*

(b) Jede Zusammenhangskomponente ist abgeschlossen in X (i.A. nicht offen, vgl. $\mathbb{Q}$).

Beispiel 4.9. (a) $\mathbb{Q}$ und die Cantormenge sind total unzusammenhängend

(b) $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \mathbb{S}^n$ hat für $n \geq 1$ genau zwei Zusammenhangskomponenten.

(c) Es gibt zusammenhängende top. Räume, die nach entfernen eines Prunktes total unzusammenhängend werden.

(d) $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$, da nach entfernen eines Punktes ungleiche Zusammenhangskomponentenanzahl.

5 Trennungseigenschaften

Definition 5.1. Definition von T_1, T_2, T_3 (regulär) und T_4 (normal).

Proposition 5.2. *(a) X ist ein T_1-Raum $\Leftrightarrow$ für jedes $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen*

(b) X ist hausdorffsch $\Leftrightarrow \forall x \in X : \{x\} = \bigcap\{\bar{U} | U$ Umgebung von $x\}$

(c) X ist regulär $\Leftrightarrow \forall x \in X\ \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists V \in \mathcal{U}(x) : \bar{V} \subset U$.

Proposition 5.3. *Jeder metrische Raum ist normal (also auch hausdorffsch und regulär).*

Zusatzbemerkung. Räume die nicht T_4 sind können also nicht metrisierbar sein.

Satz 5.4 (Lemma von Urysohn, Charakterisierung der Normalität)**.** *Sei X ein T_1- Raum. Dann sind äquivalent:*

(a) X ist normal

(b) Zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Teilmengen A, B von X existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ für $x \in A$ und $f(x) = 1$ für $x \in B$.

Satz 5.5 (Fortsetzungssatz von Tiezte)**.** *Sei X ein normaler Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann lässt sich jede stetige Funktion $f : A \to [0,1]$ oder $\mathbb{R}$ zu einer stetigen Funktion von X in $[0,1]$ oder $\mathbb{R}$ fortsetzen.*

Zusatzbemerkung. Teilräume und Produkte von T_i-Räumen sind wieder T_i-Räume.

Die Trennungsaxiome T_i vertragen sich schlecht mit Quotientenbildung.

Beispiel 5.6. $\mathbb{R}$ ist ein T_4-Raum, aber die Faktorgruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist antidiskret also kein T_1-Raum.

6 Kompaktheit

Definition 6.1. Definition von Kompaktheit.

Beispiel 6.2. (a) $\mathbb{R}$, $[0,1)$ sind nicht kompakt.

(b) Endliche T_2-Räume sind kompakt

(c) Ein diskreter Raum X ist genau dann kompakt, wenn X endlich ist.

(d) Kleiner Satz von Heine-Borell: $[0,1]$ ist kompakt.

Lemma 6.3. *Sei X ein Hausdorff-Raum und $A \subset X$*

(a) Ist A kompakt, dann ist A abgeschlossen in X.

(b) Sei X kompakt. Genau dann ist $A \subset X$ kompakt, wenn A in X abgeschlossen ist.

Lemma 6.4. *Sei $f : X \to Y$ eine setige abbildung eines kompakten Raums X in einen Hausdorf-Raum. Dann gilt:*

(a) $f(X)$ ist kompakt

(b) f ist abgeschlossen

(c) ist f bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.

Korollar 6.5 (Extrema)**.** *Sei X kompakt. Dann hat jede stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ ein Minimum und ein Maximum.*

Satz 6.6 (kleiner Tychonoff)**.** *Jedes Produkt von zwei (oder endlich vielen) kompakten Räumen ist kompakt.*

Korollar 6.7 (Heine Borell)**.** *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beispiel 6.8. $\mathbb{S}^n$, $P_n = \mathbb{S}/_\sim$ sind kompakt (denn nach 6.4 (a) sind Haudorffsche Quotienten von kompakten Räumen wieder kompakt).

Lemma 6.9. *Ein Hausdorff-Raum ist genau dann kompakt, wenn jedes System $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft*

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset \text{ für } n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$$

einen nichtleeren Durchschnitt hat $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Satz 6.10 (Tychonoff)**.** *Jedes Produkt $X = \prod_{i \in I} X_i$ von kompakten Räumen X_i $(i \in I)$ ist kompakt.*

Beispiel 6.11. Die Cantormenge $C \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt.

Satz 6.12. *Jeder kompakte Raum X mit abzählbarer Basis ist homöomorph zu einen Teilraum von $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Insbesondere gilt $|X| \leq |\mathbb{R}|$.*

Zusatzbemerkung. Mit Tychonoff folgt: die abgeschlossenen Teilräume von $[0,1]^{\mathbb{N}}$ sind genau die kompakten Räume mit abzählbarer Basis (bis auf Homöomorphie).

Satz 6.13 (2. Metrisationssatz von Urysohn)**.** *Ein kompakter Raum X ist genau dann metrisierbar (d.h. es gibt eine Metrik, welche die Topologie induziert), wenn X eine abzählbare Basis hat.*

Bemerkung 6.14. 1. Metrisierbarkeitssatz von Urysohn: Jeder reguläre Raum mit abzählbarer Basis ist metrisierbar. Überabzählbare diskrete Räume sind metrisierbar, haben aber keine abzählbare Basis.

Definition 6.15. Definition von lokal kompakt.

Beispiel 6.16. Kompakte Räume, $\mathbb{R}^n$, diskrete Räume sind lokal kompakt. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist nicht lokal kompakt.

Satz 6.17. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein lokalkompakter Raum.*

(a) Dann existiert ein Kompakter Raum X_1, welcher X als Teilraum enthält, mit $|X_1 \backslash X| = 1$.

(b) X_1 ist bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt

(c) Ist X nicht kompakt, dann ist X dicht in X_1. Man nennt dann X_1 die Einpunktkompaktivizierung.

Beispiel 6.18. (a) Ist X kompakt und $\overline{X \backslash \{x\}} = X$ (d.h. x ist nicht isoliert in X, d.h. $\{x\}$ ist nicht offen in X), dann ist X die Einpunktkompaktifizierung von $X \backslash \{x\}$.

(b) $\mathbb{S}^n$ ist die EPK von $\mathbb{R}^n$, insbesondere $\mathbb{S}^1$ für $\mathbb{R}$.

(c) $[0, 1]$ ist eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R} \approx (0, 1)$, eine Zwei-Punkt-Kompaktifizierung. Analog für n.

7 Konvergenz und Vollständigkeit

Definition 7.1. Definition von gerichtet, Netz, konvergent, Grenzwert, Häufungspunkt.

Beispiel 7.2. (a) Jede linear geordnete Menge ist gerichtet.

(b) Die Menge der Zerlegungen des Intervalls $[0, 1]$ ist gerichtet.

(c) Für jede beschränkte Funktion erhält man Netze durch die Riemannintegrierbarkeit.

(d) Warnung: Netze und Folgen können mehrere Grenzwerte haben

Lemma 7.3. *Ein top. Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn jedes Netz in X höchstens einen Grenzwert hat.*

Lemma 7.4. *Ist X ein top. Raum und $A \subset X$, so ist $\bar{A}$ die Menge aller Grenzwerte von Netzen in A welche in X konvergieren. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zw. top. Räumen X und Y ist genau dann stetig, wenn gilt: Für jedes Netz a in X, das gegen x konvergiert, konvergiert das Netz $f \circ a$ in Y gegen $f(x)$.*

Definition 7.5. Definition von Cauchyfolge und vollständig.

Beispiel 7.6. (a) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

(b) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

(c) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist vollständig

(d) Cauchyfolge und Vollständigkeit sind keine rein topologischen Konzepte und hängen wesentlich von der Metrik ab.

Definition 7.7. Definition von Vervollständigung und übliche Konstruktion.

Beispiel 7.8. (a) Die Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, \text{gewöhnliche Metrik})$ ist $(\mathbb{R}, \text{gewöhnliche Metrik})$

(b) Sei p eine Primzahl und d_p die p-adische Metrik. Die Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, d_p)$ kann identifiziert werden mit dem Körper der p-adischen Zahlen.

(c) Die Vervollständigung von $(\mathbb{Z}, d_p)$ ist der Ring der Ganzen p-adischen Zahlen.

(d) Der Körper $\mathbb{Q}_p$ ist lokalkompakt und total unzusammenhängend, der Ring $\mathbb{Z}_p$ ist kompakt.

(e) Vervollständigung alle abbrechenden reellen Folgen mit der euklidischen Metrik

Satz 7.9 (Satz von Baire)**.** *Sei (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum.*

(a) Ist $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $A_n \subset X$, dann ex. ein $k \in \mathbb{N}$ mit $int(\bar{A}_k) \neq \emptyset$.

(b) Sind D_n, $n \in \mathbb{N}$, offene dichte Teilmengen in X, dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ dicht in X.

Beispiel 7.10. (a) Ist X ein vollständiger metrischer Raum ohne isolierte Punkte, dann ist X überabzählbar. Insb. ist $\mathbb{Q}$ in keiner Metrik, welche die übliche Topologie induziert, vollständig.

(b) Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche in allen $x \in \mathbb{Q}$ stetig und in allen $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ unstetig ist.

(c) Es gibt stetige Funktionen welche in keinem Punkt differenzierbar sind.

8 Homotopie

Definition 8.1. Definition von Homotopie $H : X \times [0, 1] \to Y$, homotop und nullhomotop.

Beispiel 8.2. (a) Je zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop

(b) Seien $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ stetige Abbildungen mit $f(x) \neq -g(x)$, dann sind sie homotop.

Definition 8.3. Definition von Homotopie-Äquivalenz, homtopie-äquivalent und kontrahierbar.

Lemma 8.4. *(a) Ein top. Raum X ist genau dann kontrahierbar, wenn $id_X : X \to X$ nullhomotop ist.*

(b) *Jeder Kontrahierbare Raum ist wegzusammenhängend.*

Beispiel 8.5. (a) Jede konvexe Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar.

(b) Die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und der punktierte Vektorraum $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ sind homotopieäquivalent.

Lemma 8.6 (Eilenberg)**.** *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $H : X \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ sei stetig. Dann existiert eine stetige Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$H(x,1) = H(x,0)e^{i\,\varphi(x)}$$

Satz 8.7. *Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ ist nicht kontrahierbar.*

Bemerkung 8.8. (a) Der Beweis des vorherigen Satzes zeigt auch, dass bei jedem Wetter zwei Andipodenpunkte auf dem Äquator existieren mit gleicher Temperatur.

(b) Die Kreisscheibe D ist kontrahierbar also nicht homöomorph zum Kreisring $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$, also auch nicht homotopie-äquivalent.

Korollar 8.9 (Brouwer)**.** *Jede stetige Abbildung der Kreisscheibe D in sich hat einen Fixpunkt.*

Bemerkung 8.10. Ein top. Raum X hat die Fixpunkteigenschaft, falls jede stetige Abbildung $f : X \to X$ einen Fixpunkt hat. Diese Eigenschaft bleibt beim Übergang zu einem Homöomorphen Raum erhalten.

Fixpunktsatz von Brouwer: $[0,1]^n$ hat die Fixpunkteigenschaft.

Definition und Lemma 8.11. Sei X ein top. Raum und $f : \mathbb{S}^1 \to X$ stetig, dann sind äquivalent

(a) f lässt sich zu einer stetigen Abb. $\bar{f} : D \to X$ fortsetzen (dabei ist $\mathbb{S}^1 = \partial D$ der Rand der Kreisscheibe

(b) f ist nullhomotop

Ein wegzusammmenhängerder Raum bei dem dies jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to X$ erfüllt, heißt dann *einfach zusammenhängend.*

Bemerkung 8.12. (a) Jeder kontrahierbare Raum X ist einfach zusammenhängend.

(b) Definition von n-fach zusammenhängend.

Satz 8.13. $\mathbb{S}^1$ *ist nicht einfach zusammenhängend, und* $\mathbb{S}^n$ *ist einfach zusammenhängend für $n \geq 2$.*

Korollar 8.14. $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ *ist nicht einfach zusammenhängend,* $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ *ist einfach zusammenhängend für $n \geq 3$. Insbesondere sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$ nicht homöomorph.*

Analog: Der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ist nicht einfach zusammenhängend, also nicht homöomorph zu $\mathbb{S}^2$.

Zusatzbemerkung. Es gilt:

kontrahierbar $\Rightarrow$ einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ wegzusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend

9 Fundamentalgruppen

Definition 9.1. Definition von weghomotop.

Lemma 9.2. *Sei w ein Weg in einem top. Raum X und $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ stetig mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Dann sind die Wege w und $w \circ \varphi$ weghomotop.*

Definition 9.3. Definition von Weghomotopieklassen und dem Produkt dieser.

Lemma 9.4. *Gruppeneigenschaften der Weghomotopieklassen*

Satz 9.5 (Poincare 1904)**.** *Sei X ein top. Raum udn $x_0 \in X$. Dann wird die Menge*

$$\pi_1(X, x_0) := \{[w] | w \text{ ist Weg in } X \text{ mit } w(0) = x_0 = w(1)\}$$

aller Weghomotopieklassen von geschlossenen Wegen mit Basispunkt x_0 durch die Verknüpfungen wie im vorherigen Lemma zu einer Gruppe, der sog. Fundamentalgruppe *von X mit Basispunkt x_0.*

Satz 9.6. *Sei v ein Weg in einem top. Raum X von x_0 nach x_1. Dann ist die Abbildung $c_v : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$:*

$$[w] \mapsto [\bar{v}][w][v]$$

ein Gruppenisomorphismus. Insbesondere sind bei Wegzusammenhängenden Räumen alle Gruppen $\pi_1(X, x_0)$ isomorph.

Proposition 9.7. *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\pi_1(X) = \{1\}$ trivial ist.*

Satz 9.8. $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$

Satz 9.9. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildugn zwischen top. Räumen X, Y und $x_0 \in X$. Dann ist die zugehörige* induzierte *Abbildung*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0) : [w] \mapsto [f \circ w]$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Es gilt $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ für stetige Abbilungen $X \to Y \to Z$ und $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$

Lemma 9.10. *Sei $H : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie zw. stetigen Abbildungen $f, g : X \to Y$. Ferner sei $x_0 \in X$ und $v : [0,1] \to Y$ durch $v(t) = H(x_0, t)$ definiert. Dann gilt $g_* = c_v \circ f_*$ mit c_v wie in 9.6.*

Satz 9.11. *Sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz von top. Räumen X, Y und $x_0 \in X$. Dann ist die induzierte Abbildung $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ ein Gruppenisomorphismus. Insbesondere haben wegzusammenhängende top. Räume, welche homotopieäquivalent sind isomorphe Fundamentalgruppen.*

Beispiel 9.12. (a) $\mathbb{R}^n$ oder jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so ist $\pi_1(X) = \{1\}$.

(b) $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$

(c) $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{1\}$ für $n \geq 2$

(d) $\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) = \{1\}$ für $n \geq 3$

(e) $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, weil π_1 sich gut mit Produkten verträgt.

(f) $\pi(P_n) \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ für $n \geq 2$

(g) Jede Gruppe ist Fundamentalgruppe eines geeigneten wegzusammenhängenden topologischen Raums.

(h) Einige Fundamentalgruppen mit Hilfe der Überlagerungstheorie.