
SKRIPTUM
Topologie

Definitionen und Sätze

Inhaltsverzeichnis

1	Metrische Räume	2
2	Topologische Räume und stetige Abbildungen	3
3	Produkte und Quotienten	5
4	Zusammenhang	7
5	Trennungseigenschaften	8
6	Kompaktheit	9
7	Konvergenz und Vollständigkeit	12
8	Homotopie	13

1 Metrische Räume

Definition 1.1. Definition einer *Metrik* $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und eines metrischen Raums (X, d) .

Beispiel 1.2. (a) Diskrete Metrik

(b) Euklidische Metrik (incl. Maximumsmetrik), jeder Hilbertraum (Skalarprodukt) und jeder Banachraum (norm Vektorraum) liefert eine Metrik über $d(x, y) = \|x - y\|$.

(c) Hamming-Metrik auf $X = A^n$.

(d) Metrik auf der Menge aller unendlichen Folgen und Metrik nach Frechet

Definition 1.3. Definition von Sphären, Bällen und offenen und abgeschlossenen Mengen

Beispiel 1.4. (a) Offener Ball ist offen

(b) Definition der Standardsphäre $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$

(c) Aussehen der Sphären in \mathbb{R}^2 für verschiedene p-Metriken.

Definition 1.5. ϵ und δ Definition der Stetigkeit

Satz 1.6. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ zwischen metrischen Räumen X, X' ist genau dann stetig, wenn gilt: für jede offene Teilmenge A von X' ist das Urbild offen in X . (Urbilder offener Mengen sind offen)

BEWEIS: Ausnutzung von f stetig und Offenheit von $A \subset X'$. Urbild eines Balls aus $A \subset X'$ ist offen und dann folgt δ -Ball aus Offenheit. \square

Beobachtung 1.7. In jedem metrischen Raum (X, d) gilt:

- (a) X und \emptyset sind offen und abgeschlossen.
- (b) Jede Vereinigung von offenen Mengen ist offen.
- (c) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.

BEWEIS: 1. Def 2. Punkt ist in einer Menge, die offen ist 3. Minimum aller Radien □

Lemma 1.8. Die offenen Teilmengen der euklidischen Gerade \mathbb{R} sind genau die Vereinigungen von endlich oder abzählbar vielen offenen, paarweise disjunkten Intervallen, einschließlich \mathbb{R} und \emptyset .

BEWEIS: Def einer Äquivalenzrelation aus offenen Intervallen, da \mathbb{Q} abzählbar nur Abzählbar viele Äquivalenzklassen. □

2 Topologische Räume und stetige Abbildungen

Definition 2.1. Definition einer *Topologie* und eines *topologischen Raums*.

Beispiel 2.2. (a) Natürliche Topologie des \mathbb{R}^n (und alle Metriken liefern gleiche, da gegenseitig abschätzbar)

- (b) Diskrete Topologie $(X, 2^X)$
- (c) Antidiskrete Topologie (keine Metrik, da nicht normal)
- (d) Kofinite Topologie $\mathcal{O} := \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$
- (e) Unnatürliche Topologie auf \mathbb{R} : $\mathcal{O} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
- (f) Ordnungstopologie auf linear geordneten Räumen (Strahlen oder lexikographische Ordnung)
- (g) Relativtopologie oder induzierte Topologie eines Teilraumes $\mathcal{O}_Y := \{Y \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$

Definition 2.3. Definition der Stetigkeit in allgemeinen topologischen Räumen. Definition einer *offenen* Abbildung und Definition des *Homöomorphismus* (bijektiv, stetig und Umkehrfunktion stetig \Leftrightarrow bijektiv stetig und offen). Definition zweier *homöomorphen* Räume.

Beispiel 2.4. (a) Falls $f : X \rightarrow X'$ konstant ist oder X diskret ist oder X' antidiskret ist, dann ist f stetig

- (b) Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig, aber nicht notwendig offen oder abgeschlossen

(c) Angabe einiger Homöomorphismen in \mathbb{R}

Zusatzbemerkung. (a) Auf metrischen Räumen stimmt diese Definition mit der üblichen ϵ - δ -Definition überein.

(b) Kompositionen stetiger Abbildungen sind stetig

(c) Einschränkungen stetiger Abbildungen sind stetig

Definition 2.5. Definition von Umgebung, Umgebungssystem, Berührungspunkt, Abschluss \bar{A} , dicht, innerer Punkt, Innere $\overset{\circ}{A}$, Rand $\partial A := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Lemma 2.6. *A ist offen genau dann wenn es Umgebung aller Punkte ist. Charakterisierung von \bar{A} , $\overset{\circ}{A}$, ∂A*

BEWEIS: Elementar

□

Definition 2.7. Definition der Stetigkeit in einem Punkt

Lemma 2.8. *Eine Abbildung zwischen top. Räumen ist genau dann stetig, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.*

BEWEIS: Eine Richtung klar. Andernfalls Vereinigung der offenen Urbilder aller Punkte.

□

Definition 2.9. Definition einer *Basis* und einer *Subbasis*

Beispiel 2.10. Die Bälle bilden eine Basis für die Topologie eines metrischen Raums, also die Intervalle (a, b) mit $a, b \in \mathbb{Q}$ für \mathbb{R} und die offenen Halbgeraden bilden eine Subbasis. Die Mengen der Form $X \setminus \{x\}$ bilden eine Subbasis für die kofinite Topologie.

Lemma 2.11. (a) *Sei $\mathcal{B} \subset 2^X$ mit $\bigcup \mathcal{B} = X$ und $B, B' \in \mathcal{B}, x \in B \cap B' \Rightarrow \exists B'' \in \mathcal{B} : x \in B'' \subset B \cap B'$.*

Dann ist \mathcal{B} eine Basis für genau eine Topologie, nämlich $\mathcal{O} := \{\bigcup B' : B' \subset \mathcal{B}\}$

(b) *Sei $\gamma \subset 2^X$ beliebig. Dann ist es eine Subbasis für genau eine Topologie auf X , die endlichen Schnitte bilden eine Basis dieser Topologie.*

BEWEIS: 1. \emptyset und X enthalten und stabil gegen Vereinigungen und endliche Schnitte. 2. endl. Schnitte erfüllen 1.

□

Abzählbarkeitsaxiome 2.12. *Ein top. Raum erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn eine abzählbare Basis existiert.*

Er erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn das Umgebungssystem jedes Punktes eine abzählbare Umgebungsbasis enthält.

Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Er hat genau dann eine abzählbare Basis, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Insbesondere hat \mathbb{R}^n eine abzählbare Basis.

Andere Axiomatisierung topologischer Räume 2.13.

- Über abgeschlossene Mengen
- Über das Umgebungssystem jedes Punktes
- Über Abschlussbildung

3 Produkte und Quotienten

Definition 3.1. Definition des Produktraums ($X = \prod_{i \in I} X_i$) und der Produkttopologie. Dazugehörige Projektion. Und Subbasis $\{p_i^{-1}(O_i) | i \in I, O_i \in \mathcal{O}_i\}$.

Basis der Produkttopologie ist $\bigcap_{i \in E} p_i^{-1}(O_i)$ und für endliche Produkte gilt:

$$O_1 \times \cdots \times O_n$$

Beispiel 3.2. (a) Produkte offener Intervalle in \mathbb{R} bilden eine Basis für die Produkttopologie von \mathbb{R}^n , die mit der natürlichen Topologie zusammenfällt.

(b) Kreislinie \mathbb{S}_1 , Zylinder $\mathbb{S}_1 \times [0, 1]$, Torsus $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$

(c) Cantormenge ist homoömorph zu $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ mit $\{0, 2\}$ der diskreten Topologie.

$$C := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid a_n \in \{0, 2\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Lemma 3.3. Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ der Produktraum der topologischen Räume X_i

(a) Jede Projektion $p_i : X \rightarrow X_i$ ist stetig und offen

(b) Eine Abbildung $g : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann stetig, wenn alle Koordinatenabbildungen $p_i \circ g : Y \rightarrow X_i$ stetig sind.

BEWEIS: 1. Stetig nach Def und offen, da das Bild einer Basismenge offen ist. 2 $p \circ g$ stetig. Andere Richtung folgt aus den Subbasiselementen $p_i^{-1}(O_i)$ die als Urbilder von g offen sind. □

Zusatzbemerkung. Unter allen Topologien auf der Produktmenge, welche die Projektionen stetig machen, ist die Produkttopologie die größte, d.h. die mit den wenigsten offenen Mengen.

Projektionen sind nicht immer abgeschlossene Abbildungen.

Definition 3.4. Definition der topologischen Gruppe.

Definition 3.5. Sei $q : X \rightarrow Y$ surjektiv. Definition der Quotiententopologie bzgl. q ($\mathcal{O}' := \{U \mid U \subseteq Y, q^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}$), Identifikationsabbildung (man nennt so q , falls \mathcal{O}' die Quotiententopologie bzgl. q ist, kanonische Projektion, Quotientenraum

Zusatzbemerkung. Die Quotiententopologie ist so gewählt, dass q stetig ist.

Beispiel 3.6. (a) $[0, 1]$ mit $1 \sim 0$ ist homöomorph zu \mathbb{S}^1

(b) Zylinder

(c) Möbiusband

(d) Torsus

(e) Kleinsche Flasche

Lemma 3.7. *Sei $q : X \rightarrow Y$ eine Identifikationsabbildung. Eine Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ q : X \rightarrow Z$ stetig ist.*

BEWEIS: Nach Definition der Quotiententopologie, da q identifizierend. Andere Richtung klar. \square

Korollar 3.8. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine identifizierende Abbildung zwischen topologischen Räumen X, Y . Ferner sei \sim auf X definiert durch $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ für $x, y \in X$, und $q : X \rightarrow X/\sim$ die zugehörige kanonische Projektion. Dann ist*

$$\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y : [x] \mapsto f(x)$$

ein wohldefinierter Homöomorphismus, also $X/\sim \approx Y$, und es gilt $f = \bar{f} \circ q$.

BEWEIS: Aus vorherigem Lemma und da f identifizierend ist. \square

Lemma 3.9. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Surjektion. Ist f offen oder abgeschlossen, so ist f eine Identifikationsabbildung.*

BEWEIS: Z.Z: U offen in $Y \Leftrightarrow f^{-1}(U)$ offen in X . Eine Richtung folgt aus Stetigkeit, andere aus f surjektiv und demnach $U = f(f^{-1}(U))$ bzw. $U = \setminus f(X \setminus f^{-1}(U))$ \square

Beispiel 3.10. (a) Beweis vorheriger Beispiele für Kreis, Zylinder, usw. durch Angabe einer stetigen Surjektion, die abgeschlossen ist

(b) Projektiver Raum (Quotiententopologie bzgl. $q : \mathbb{S}^n \rightarrow P_n, q(v) = \mathbb{R} \cot v$.

(c) Kegel $X \times [0, 1]/\sim_{x \times 1}$, Doppelkegel $X \times [0, 1]/\sim_{x \times 0 \cup x \times 1}$

Definition 3.11. Definition des Homogenen Raums aus einer beliebigen Untergruppe $G/\sim := \{xH \mid x \in G\}$ oder G/H

Beispiel 3.12. (a) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx \mathbb{S}^1$

(b) \mathbb{R}/\mathbb{Q}

(c) Grassmann-Mannigfaltigkeit

Definition 3.13. Definition von Summe ($\mathcal{O}' = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{O}_x; B \in \mathcal{O}_y\}$) zweier disjunkter topologischer Räume und Verklebungsraum ($X \cup_f Y$, entspricht Quotientenraum $X + Y/\sim$).

Beispiel 3.14. (a) Spähre aus Ball durch Ankleben eines Punktes

(b) Projektiver Raum

(c) CW-Komplexe

4 Zusammenhang

Definition 4.1. Definition von zusammenhängend und wegzusammenhängend.

Beispiel 4.2. (a) Zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R} sind genau die Intervalle

(b) \mathbb{Q} und die Cantormenge sind nicht zusammenhängend

(c) Beispiel eines zusammenhängenden, aber nicht wegzusammenhängenden Raums

$$X = \left\{ x, \sin \frac{1}{x} \mid x > 0 \right\} \cup \{(0, 0)\} \supset \mathbb{R}^2$$

Lemma 4.3. (a) X zush. \Leftrightarrow es existiert keine stetige Surjektion $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ diskret
 \Leftrightarrow jede solche stetige Abbildung ist konstant.

(b) Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.

(c) Überlappende (weg-)zusammenhängende Räume sind (weg-)zusammenhängend

(d) Ist X (weg-)zusammenhängend, und f stetig so ist auch $f(X)$ (weg-)zusammenhängend

BEWEIS: 1. relativ Klar, 2. Es kann keine stetige Surjektion f zwischen dem Anfang- und Endpunkt eines Wegs geben. 3. f definiert auf der Vereinigung ist auf allen Teilen konstant. wegzusammenhang klar 4. Zusammenhängen, da f aus 1. konstant und wegzusammenhängend aus $f \circ w$. □

Korollar 4.4 (Zwischenwertsatz). Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(X)$ ein Intervall.

Proposition 4.5. Ein top. Raum ist genau dann wegzusammenhängend, wenn X zusammenhängend ist und jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung hat.

BEWEIS: Eine Richtung klar, andere: eine wegzusammenhängende Umgebung ist offen und auch abgeschlossen und somit ganz X . □

Korollar 4.6. Jede offene zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^n ist wegzusammenhängend.

BEWEIS: Die Bälle sind wegzusammenhängend. □

Definition 4.7. Definition von Zusammenhangskomponente und total unzusammenhängend.

Lemma 4.8. (a) Die Zusammenhangskomponenten $Z(x)$ von X bilden eine Partition von X .

(b) Jede Zusammenhangskomponente $Z(x)$ ist abgeschlossen in X (i.A. nicht offen, vgl. \mathbb{Q}).

BEWEIS: 1. Falls sie sich schneiden sind sie gleich. 2. Abschluss von $Z(x)$ auch zusammenhängend. Generell: Mit A auch B zusammenhängend mit $A \subset B \subset \bar{A}$ \square

Beispiel 4.9. (a) \mathbb{Q} und die Cantormenge sind total unzusammenhängend

(b) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$ hat für $n \geq 1$ genau zwei Zusammenhangskomponenten.

(c) Es gibt zusammenhängende top. Räume, die nach Entfernen eines Punktes total unzusammenhängend werden.

(d) $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$, da nach Entfernen eines Punktes ungleiche Zusammenhangskomponentenanzahl.

5 Trennungseigenschaften

Definition 5.1. Definition von T_1 , T_2 (Hausdorffraum), T_3 (regulär, auch T_1 gefordert) und T_4 (normal, auch T_1 gefordert).

Beispiel 5.2. (a) Unendliche Menge mit kofiniter Topologie T_1 aber nicht T_2

(b) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat} \cup \{\mathbb{Q} \cap O \mid O \in \mathcal{O}_{nat}\})$ ist T_2 und nicht T_3

Proposition 5.3. (a) X ist ein T_1 -Raum \Leftrightarrow für jedes $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen

(b) X ist hausdorffsch $\Leftrightarrow \forall x \in X : \{x\} = \bigcap \{\bar{U} \mid U \text{ Umgebung von } x\}$

(c) X ist regulär $\Leftrightarrow \forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(x) : \bar{V} \subset U$.

BEWEIS: Geeignete Wahl von Mengen und deren Komplementen. \square

Proposition 5.4. Jeder metrische Raum ist normal (also auch hausdorffsch und regulär).

BEWEIS: T_1 klar. T_4 über $s = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} > 0$ (da A und B abgeschlossen ist und es sonst einen Schnittpunkt gäbe). \square

Zusatzbemerkung. Räume die nicht T_4 sind können also nicht metrisierbar sein.

Satz 5.5 (Lemma von Urysohn, Charakterisierung der Normalität). *Sei X ein T_1 -Raum. Dann sind äquivalent:*

- (a) X ist normal
- (b) *Zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Teilmengen A, B von X existiert eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 0$ für $x \in A$ und $f(x) = 1$ für $x \in B$.*

BEWEIS: Eine Richtung klar, da f stetig. Andere folgt über Niveaulinien (lang). \square

Satz 5.6 (Fortsetzungssatz von Tietze). *Sei X ein normaler Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann lässt sich jede stetige Funktion $f : A \rightarrow [0, 1]$ oder \mathbb{R} zu einer stetigen Funktion von X in $[0, 1]$ oder \mathbb{R} fortsetzen.*

BEWEIS: Benutzt Urysohn-Funktionen um eine Folge zu konstruieren, die f approximieren. \square

Zusatzbemerkung. Teilräume und Produkte von T_i -Räumen sind wieder T_i -Räume.

Die Trennungssaxiome T_i vertragen sich schlecht mit Quotientenbildung.

Beispiel 5.7. \mathbb{R} ist ein T_4 -Raum, aber die Faktorgruppe \mathbb{R}/\mathbb{Q} ist antidiskret also kein T_1 -Raum.

6 Kompaktheit

Definition 6.1. Definition von Kompaktheit (auch Hausdorffraum).

Beispiel 6.2. (a) $\mathbb{R}, [0, 1]$ sind nicht kompakt.

- (b) Endliche T_2 -Räume sind kompakt
- (c) Ein diskreter Raum X ist genau dann kompakt, wenn X endlich ist.
- (d) Kleiner Satz von Heine-Borell: $[0, 1]$ ist kompakt.

Lemma 6.3. *Sei X ein Hausdorff-Raum und $A \subset X$*

- (a) *Ist A kompakt, dann ist A abgeschlossen in X .*
- (b) *Sei X kompakt. Genau dann ist $A \subset X$ kompakt, wenn A in X abgeschlossen ist.*

BEWEIS: 1. $X \setminus A$ ist offen, Schnitt der endlich vielen Mengen disjunkt zur endlichen Überdeckung von A . 2. Eine Richtung klar. Andere mit $X \setminus A$ Zurückführung auf Kompaktheit von X . \square

Lemma 6.4. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung eines kompakten Raums X in einen Hausdorff-Raum. Dann gilt:

- (a) $f(X)$ ist kompakt
- (b) f ist abgeschlossen
- (c) ist f bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.

BEWEIS: 1. Mit f^{-1} Rückführung auf Kompaktheit von X . 2. Klar 3. Folgt direkt aus $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ für Bijektionen. \square

Korollar 6.5 (Extrema). Sei X kompakt. Dann hat jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Minimum und ein Maximum.

BEWEIS: $f(X)$ abgeschlossen und beschränkt. \square

Satz 6.6 (kleiner Tychonoff). Jedes Produkt von zwei (oder endlich vielen) kompakten Räumen ist kompakt.

BEWEIS: Zurückführung der offenen Überdeckung auf X und Y und dann Anwendung von Kompaktheit. \square

Korollar 6.7 (Heine Borell). Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

BEWEIS: Klar aus vorherigen Sätzen, da der Würfel $[-r, r]^n$ kompakt ist. \square

Beispiel 6.8. $\mathbb{S}^n, P_n = \mathbb{S}/\sim$ sind kompakt (denn nach 6.4 (a) sind Hausdorffsche Quotienten von kompakten Räumen wieder kompakt).

Lemma 6.9. (Endliche Durchschnittseigenschaft) Ein Hausdorff-Raum ist genau dann kompakt, wenn jedes System \mathcal{A} von abgeschlossenen Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft

$$A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset \text{ für } n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

einen nichtleeren Durchschnitt hat $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

BEWEIS: Arbeiten mit Komplementen von A : $X \setminus A$, die bei leerem Durchschnitt Überdecken würden und aus Kompaktheit folgt Widerspruch zur EDE. Bei einer offenen Überdeckung von X Übergang zum Komplement (abgeschlossen). Dies muss die EDE verletzen, also muss es endlich viele geben. \square

Satz 6.10 (Tychonoff). Jedes Produkt $X = \prod_{i \in I} X_i$ von kompakten Räumen X_i ($i \in I$) ist kompakt.

BEWEIS: Man zeige die EDE. Man wähle ausgehend von einem System von abgeschlossenen Mengen die größte Menge mit der EDE (Lemma von Zorn auf die mit Inklusion geordnete Kette). Dieses Element projiziere man auf die einzelnen X_i . Da diese kompakt sind besitzen sie die EDE und es gibt ein x_i darin. $x = (x_i)_{i \in I}$ ist dann im Schnitt aller abgeschlossenen Mengen von X . \square

Beispiel 6.11. Die Cantormenge $C \approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt.

Satz 6.12. *Jeder kompakte Raum X mit abzählbarer Basis ist homöomorph zu einem Teilraum von $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Insbesondere gilt $|X| \leq |\mathbb{R}|$.*

BEWEIS: Durchnummerierung der Funktion nach Urysohn zwischen Paaren von Basiselementen. \square

Zusatzbemerkung. Mit Tychonoff folgt: die abgeschlossenen Teilräume von $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ sind genau die kompakten Räume mit abzählbarer Basis (bis auf Homöomorphie).

Satz 6.13 (2. Metrisationssatz von Urysohn). *Ein kompakter Raum X ist genau dann metrisierbar (d.h. es gibt eine Metrik, welche die Topologie induziert), wenn X eine abzählbare Basis hat.*

BEWEIS: Bälle mit Radius $1/n$ bilden eine abzählbare Basis. Umgekehrt: Folgt aus vorherigem Satz, da $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ metrisierbar. \square

Bemerkung 6.14. 1. Metrisierbarkeitssatz von Urysohn: Jeder reguläre Raum mit abzählbarer Basis ist metrisierbar. Überabzählbare diskrete Räume sind metrisierbar (triviale Metrik), haben aber keine abzählbare Basis.

Definition 6.15. Definition von lokalkompakt (auch Hausdorffsch)

Beispiel 6.16. Kompakte Räume, \mathbb{R}^n , diskrete Räume sind lokal kompakt. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist nicht lokal kompakt (sonst wäre eine Menge $O_1 \times O_2 \times \dots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ in einer kompakten Menge enthalten).

Satz 6.17. *Sei (X, \mathcal{O}) ein lokalkompakter Raum.*

- (a) *Dann existiert ein Kompakter Raum X_1 , welcher X als Teilraum enthält, mit $|X_1 \setminus X| = 1$.*
- (b) *X_1 ist bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt.*
- (c) *Ist X nicht kompakt, dann ist X dicht in X_1 . Man nennt dann X_1 die Einpunktkompaktifizierung.*

BEWEIS: Erweitere Raum um Punkt ∞ und wähle eine geeignete Topologie $\mathcal{O}_1 := \mathcal{O} \cup \{X_1 \setminus K \mid K \subset X, K \text{ kompakt}\}$. T_1 folgt aus lokalkompakt. \square

Beispiel 6.18. (a) Ist X kompakt und $\overline{X \setminus \{x\}} = X$ (d.h. x ist nicht isoliert in X , d.h. $\{x\}$ ist nicht offen in X), dann ist X die Einpunktkompaktifizierung von $X \setminus \{x\}$.

- (b) \mathbb{S}^n ist die EPK von \mathbb{R}^n , insbesondere \mathbb{S}^1 für \mathbb{R} .
- (c) $[0, 1]$ ist eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R} \approx (0, 1)$, eine Zwei-Punkt-Kompaktifizierung (Analog für andere n).

7 Konvergenz und Vollständigkeit

Definition 7.1. Definition von gerichtet, Netz, konvergent, Grenzwert, Häufungspunkt.

Beispiel 7.2. (a) Jede linear geordnete Menge ist gerichtet.

- (b) Die Menge der Zerlegungen des Intervalls $[0, 1]$ ist gerichtet.
- (c) Für jede beschränkte Funktion erhält man Netze durch die Riemannintegrierbarkeit.
- (d) Warnung: Netze und Folgen können mehrere Grenzwerte haben (in $X = \mathbb{N}$ konvergiert $a_n = n$ mit der kofiniten Topologie gegen jedes $x \in N$)

Lemma 7.3. Ein top. Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn jedes Netz in X höchstens einen Grenzwert hat.

BEWEIS: Aus Hausdorff folgt es direkt. Falls nicht Hausdorff, so gibt es Punkte mit nichtleerem Schnitt aller Umgebungen \Rightarrow zwei Grenzwerte. \square

Lemma 7.4. Ist X ein top. Raum und $A \subset X$, so ist \bar{A} die Menge aller Grenzwerte von Netzen in A welche in X konvergieren. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zw. top. Räumen X und Y ist genau dann stetig, wenn gilt: Für jedes Netz a in X , das gegen x konvergiert, konvergiert das Netz $f \circ a$ in Y gegen $f(x)$.

BEWEIS: Nicht durchgeführt (In Räumen mit abzählbaren Umgebungsbasen gilt auch die Version mit Folgen statt Netzen. \square)

Definition 7.5. Definition von Cauchyfolge in einem metrischen Raum und vollständig.

Beispiel 7.6. (a) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

- (b) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.
- (c) (\mathbb{R}^n, d_2) ist vollständig
- (d) Cauchyfolge und Vollständigkeit sind keine rein topologischen Konzepte und hängen wesentlich von der Metrik ab.

Definition 7.7. Definition von Vervollständigung und übliche Konstruktion.

BEWEIS: Sei $C := \{a \mid a \text{ ist Cauchyfolge in } X\}$, mit Äquivalenzrel. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$. Dann ist $\hat{X} := C/\sim = \{[a] \mid a \in C\}$ vollständig mit $\hat{d}([a], [b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n)$. X wird

identifiziert über die Äquivalenzklassen konstanter Folgen $[(x, x, \dots)]$ und liegt dicht in X . □

Beispiel 7.8. (a) Die Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, \text{gewöhnliche Metrik})$ ist $(\mathbb{R}, \text{gewöhnliche Metrik})$

(b) Sei p eine Primzahl und d_p die p -adische Metrik. Die Vervollständigung von (\mathbb{Q}, d_p) kann identifiziert werden mit dem Körper der p -adischen Zahlen.

(c) Die Vervollständigung von (\mathbb{Z}, d_p) ist der Ring der Ganzen p -adischen Zahlen.

(d) Der Körper \mathbb{Q}_p ist lokalkompakt und total unzusammenhängend, der Ring \mathbb{Z}_p ist kompakt.

(e) Vervollständigung alle abbrechenden reellen Folgen mit der euklidischen Metrik

Satz 7.9 (Satz von Baire). *Sei (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum.*

(a) *Ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit $A_n \subset X$, dann ex. ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\text{int}(\bar{A}_k) \neq \emptyset$.*

(b) *Sind $D_n, n \in \mathbb{N}$, offene dichte Teilmengen in X , dann ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$ dicht in X .*

BEWEIS: 2. Z.z. $U \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$, wähle absteigende Bälle in D_n , Grenzwert (Cauchyfolge) liegt in \bar{B}_n für alle $n \in \mathbb{N}$. 1. folgt sofort über $D_n := X \setminus \bar{A}_n$ □

Beispiel 7.10. (a) Ist X ein vollständiger metrischer Raum ohne isolierte Punkte, dann ist X überabzählbar (sonst müsste $\text{int}(\overline{\{x\}}) \neq \emptyset$ gelten). Insb. ist \mathbb{Q} in keiner Metrik, welche die übliche Topologie induziert, vollständig.

(b) Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche in allen $x \in \mathbb{Q}$ stetig und in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ unstetig ist.

(c) Es gibt stetige Funktionen welche in keinem Punkt differenzierbar sind.

8 Homotopie

Definition 8.1. Definition von Homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, homotop (von stetigen Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$) und nullhomotop.

Beispiel 8.2. (a) Je zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind homotop

(b) Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetige Abbildungen mit $f(x) \neq -g(x)$, dann sind sie homotop.

Definition 8.3. Definition von der Homotopie-Äquivalenz einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$, homotopie-äquivalent und kontrahierbar.

Lemma 8.4. (a) *Ein top. Raum X ist genau dann kontrahierbar, wenn $\text{id}_X : X \rightarrow X$ nullhomotop ist.*

(b) Jeder kontrahierbare Raum ist wegzusammenhängend.

BEWEIS: 1. f Homotopie-Äquivalenz mit Inverse g so ist $g \circ f$ konstant und homotop zu id_X . f konstant und g id, so ist f Homotopie-Äquivalenz 2. Die Homotopie definiert für jedes x den Weg. \square

Beispiel 8.5. (a) Jede konvexe (sternförmige) Teilmenge A von \mathbb{R}^n ist kontrahierbar.

(b) Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und der punktierte Vektorraum $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind homotopie-äquivalent.

Lemma 8.6 (Eilenberg). Sei X ein kompakter metrischer Raum und $H : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ sei stetig. Dann existiert eine stetige Abbildung $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$H(x, 1) = H(x, 0)e^{i\varphi(x)}$$

BEWEIS: Es ist $|H(x, t) - H(x, t')| < 2$ für nahe t, t' , da sonst Widerspruch zu gleichem Grenzwert. Also keine Antipoden. $r \rightarrow e^{ir} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ (Homöomorphismus) ist umkehrbar. Mit Teleskopprodukt konstruiert man es dann. \square

Satz 8.7. Die Kreislinie \mathbb{S}^1 ist nicht kontrahierbar.

BEWEIS: Stetige Abbildung aus Eilenberg ist injektiv. Daraus konstruiert man $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \{-1, 1\}$ welches surjektiv ist. Widerspruch zu zusammenhängend. \square

Bemerkung 8.8. (a) Der Beweis des vorherigen Satzes zeigt auch, dass bei jedem Wetter zwei Antipodenpunkte auf dem Äquator existieren mit gleicher Temperatur (da Injektivität nicht gegeben sein darf).

(b) Die Kreisscheibe D ist kontrahierbar (Konvexe Menge im \mathbb{R}^2) also nicht homöomorph zum Kreisring $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, also auch nicht homotopie-äquivalent.

Korollar 8.9 (Brouwer). Jede stetige Abbildung der Kreisscheibe D in sich hat einen Fixpunkt.

BEWEIS: Falls es keinen Fixpunkt gibt kann man eine Kontraktion von \mathbb{S}^1 finden. \square

Bemerkung 8.10. Ein top. Raum X hat die Fixpunkteigenschaft, falls jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$ einen Fixpunkt hat. Diese Eigenschaft bleibt beim Übergang zu einem Homöomorphen Raum erhalten.

Fixpunktsatz von Brouwer: $[0, 1]^n$ hat die Fixpunkteigenschaft.

Definition und Lemma 8.11. Sei X ein top. Raum und $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ stetig, dann sind äquivalent

(a) f lässt sich zu einer stetigen Abb. $\bar{f} : D \rightarrow X$ fortsetzen (dabei ist $\mathbb{S}^1 = \partial D$ der Rand der Kreisscheibe)

(b) f ist nullhomotop

Ein wegzusammenhängender Raum bei dem dies jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ erfüllt, heißt dann *einfach zusammenhängend*.

BEWEIS: 1. \Rightarrow 2. \mathbb{S}^1 entlang D zusammenziehen auf einen Punkt. 2. \Rightarrow 1. Aus der Homotopie kann man \bar{f} konstruieren. \square

Bemerkung 8.12. (a) Jeder kontrahierbare Raum X ist einfach zusammenhängend.

(b) Definition von n -fach zusammenhängend.

Satz 8.13. \mathbb{S}^1 ist nicht einfach zusammenhängend, und \mathbb{S}^n ist einfach zusammenhängend für $n \geq 2$.

BEWEIS: 1. Die Identität ist nicht nullhomotop (da nicht kontrahierbar). 2. Unterscheidung ob $f(\mathbb{S}^1)$ nicht surjektiv (dann wie \mathbb{R}^n also klar, da \mathbb{R}^n kontrahierbar) oder surjektiv. Dann Unterteilung in endlich viele Teilbögen, die keine Antipoden enthalten. Straffziehen dieser. Aber \mathbb{R}^n kann nicht aus endlich vielen Bögen aufgebaut werden, anwenden von 1. \square

Korollar 8.14. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend für $n \geq 3$. Insbesondere sind \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^n für $n \geq 3$ nicht homöomorph.

Analog: Der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ist nicht einfach zusammenhängend, also nicht homöomorph zu \mathbb{S}^2 .

BEWEIS: Top. Räume sind genau dann einfach zusammenhängend, wenn dies für jeden Faktor gilt. \square

Zusatzbemerkung. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\text{kontrahierbar} \Rightarrow \text{einfach zusammenhängend} \\ &\Rightarrow \text{wegzusammenhängend} \Rightarrow \text{zusammenhängend} \end{aligned}$$

Keine Richtung ist umkehrbar!

Zusatzbemerkung. Aus dem Riemannschen Abbildungssatz folgt, dass jede nichtleere einfach zusammenhängende offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist zu \mathbb{R}^2 homöomorph (und daher sogar kontrahierbar).