Zeitreihenanalyse I und II Diplomsprotokoll

Datum: Februar 2010
Prüfer: Prof. Dr. Michael Falk
Note: 1.0

Warum betrachtet man Zeitreihen?
Man gibt die Annahme der identischen und unabhängigen Verteilung der Zufallsgrößen zum Teil auf und modelliert Zufallsgrößen, die von den vorherigen Werten oder den vorherigen Fehlern abhängen.

Gibt man die identische und unabhängige Verteilung ganz auf?
Nein, manchmal fordert man diese für die Fehler im Modell.

Welche Eigenschaften fordert man im Gegenzug dabei von einer Zeitreihe?
Stationarität, also dass der Erwartungswert konstant ist und die Autokovarianzfunktion nur vom Lag abhängt.

Dies ist die schwache Stationarität, was besagt die starke Stationarität?
???

Und wie haben wir jetzt zu Beginn die Zeitreihe modelliert?
Mit Hilfe von linearen Filtern. Insbesondere Differenzfiltern, Moving Averages, Simple Moving Averages und daraus resultierend saisonalen Anpassungen. Wir haben aber auch Glätter verwendet (Exponentiellen Glättern, z. B. beim Tachometer).

Was sind verallgemeinerte lineare Prozesse?
$Y_t = \sum_{u \in \mathbb{Z}} a_u \epsilon_{t-u}$

Warum existieren diese?
Beweis kurz skizzieren, bzw. dass $E(|Y_t|) < \infty$ (Monotone Konvergenz). Wir haben es sogar für allgemeinere Prozesse ($Y_t = \sum_{u \in \mathbb{Z}} a_u Z_{t-u}$) bewiesen. Man benötigt nur $\sup E(|Z_t|) < \infty$.

Sind diese Stationär?
Ja, folgt aus einem Satz der Vorlesung. Da die Existenz auch des Betrags des Prozesses garantiert ist können wir gemäß dem Satz über Dominierte Konvergenz alles so berechnen wie man dies intuitiv machen würde.

Wie kann man die ϵ_t zurückgewinnen?
Funktioniert nur bei endlichen Filterlängen und dann nur, wenn der inverse Filter existiert (Nullstellen des charakteristischen Polynoms außerhalb des Einheitskrieses).

Welchen Satz haben Sie hier gerade verwendet?
Satz über den inversen kausalen absolut summierbaren Filter.

Beweisidee?
Darstellung als Linearfaktoren und dann geometrische Reihe. Für Invertierbarkeit genügt, dass keine Nullstelle auf dem Einheitskreis liegt. Außerhalb wird nur für Kausalität benötigt.

Was passiert dann, wenn eine Nullstelle auf dem Einheitskreis liegt?
Dann ist der Filter nicht mehr absolut summierbar.

Wo benötigt man diesen Satz?
Invertierbarkeit eines $MA(q)$-Prozesses und Stationarität eines $AR(p)$-Prozesses. Beziehungsweise dann für die ähnlichen Eigenschaften eines $ARMA(p, q)$ Prozesses.

Ein $AR(p)$-Prozess ist also nicht immer Stationär?
Nein, aber wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms außerhalb des Einheitskreises liegen existiert ein iverser kausaler absolut summierbarer Filter. D.h. der $AR(p)$-Prozess lässt sich als unendlicher MA-Prozess schreiben. Dieser ist dann nach dem Satz, den wir zuvor hatten stationär.

Wie bestimmt man dabei die Ordungen dieser Prozesse?
Bei $MA(q)$ über das ACF-Diagramm und bei $AR(p)$ über das PACF-Diagramm.

Wie lässt sich die Autokorrelationsfunktion eines $AR(p)$-Prozesses beschreiben?
Yule-Walker Gleichungen (auch in Matrixschreibweise).

Wie erhält man dadurch die partiellen Autokorrelationskoeffizienten?
Abwandlungen der Matrixschreibweise der Yule-Walker Gleichungen und dann erhält auch, dass $(a_1, \ldots, a_p, 0, 0, 0)^T$ eine Lösung für $AR(p)$ Prozesse ist ab einem Lag größer als p. Also verschwindet das PACF-Diagramm ab dem Lag. Beziehungsweise die empirischen partiellen Autokorrelationskoeffizienten sind ungefähr Null.

Wie lässt sich die Autokovarianzfunktion eines stationären Prozesses charakterisieren?
Einerseits: Eine symmetrische positiv definite Funktion ist die Autokovarianzfunktion eines stationären Prozesses. Andererseits: Die Autokovarianzfunktion lässt sich in Integralschreibweise darstellen: $\gamma(k) = \int_0^1 e^{2\pi i\lambda k}\, dF(\lambda)$, mit einer maßerzeugenden Funktion F mit $F(0) = 0$.

Was erhält man wenn die Funktion eine Dichte besitzt?
$\gamma(k) = \int_0^1 e^{2\pi i\lambda k} f(\lambda)\, d\lambda$, also die inverse Fouriertransformierte.

Wie rechtfertigt dies die Analyse einer Zeitreihe im Frequenzbereich?
$f(\lambda)$ ist die Fouriertransformierte der theoretischen Autokovarianzfunktion. Also kann man die eine in die andere überführen und deshalb sind beide Betrachtungsweisen äquivalent.

Was erhält man für die empirischen Gegenstücke?
Periodogramm ist Fouriertransformierte der empirischen Autokovarinanzfunktion und umgekehrt durch inverse Fouriertransformation.

Wie lautet die emprische Autokovarianzfunktion?
$c(k) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-k} (y_r - \bar{y})(y_{r+k} - \bar{y})$

Warum verwendet man $1/n$?
Die $c(k)$ sind sowohl mit $1/n$ als auch mit $1/(n-k)$ nicht erwartungstreu, aber die empirische Autokovarianzmatrix ist dann, wie ihr theoretisches Gegenstück auch, positiv semidefinit.

Wie wirken sich lineare Filter auf die Autokovarianzfunktion aus?
Im Zeitbereich ist die Auswirkung ziemlich undurchsichtig (Doppelsumme). Im Frequenzbereich lässt es sich aber über $f_Y = |f_a(\lambda)|^2 \cdot f_Y$ darstellen. Insbesondere kann man an $|f_a(\lambda)|^2$ erkennen, ob die entsprechenden Frequenzen verstärkt oder abgeschwächt werden.

Oftmals erkennt man erst im Frequenzbereich die tatsächlichen Auswirkungen der linearen Filter, die wir zu Beginn der Vorlesung besprochen haben. Insbesondere der saisonale Differenzfilter zeigt auch negative Effekte, da Frequenzen zwischen denen, die man eliminieren möchte, verstärkt werden.

Kann man sich diese Tranferfunktionen auch vorgeben?
Ja, Entwicklung von Low-Pass und High-Pass-Filtern. Aber mit starken Schwingungen an den Übergängen.

Wie schätzt man die Spektraldichte?
Man nutzt das Periodogramm. Dieses konvergiert aber zuerst nur im Erwartungswert gegen die Sprektraldichte, wobei die Varianz nicht verschwindet, sodass es kein konsistenter Schätzer ist. Konsistenz erreicht man durch eine geeignete Mittelung über spezielle Gewichte, die gewisse Eigenschaften erfüllen müssen. Eine Eigenschaft sorgt dabei dafür, dass die Varianz verschwindet (da ein Bruch mit einer Null im Nenner gegen eine Konstante konveriert, also muss auch der Zähler gegen Null gehen).

Wie kann man sich einfach diese Gewichte konstruieren?
Über Kernelfunktionen, die $\int_{-1}^{1} K(x)^2 < \infty$ erfüllen.

Wie sieht ein Zustandsraummodell aus?
Aufschreiben der beiden Gleichungen

Welche bekannten Prozesse lassen sich so darstellen?
Eigentlich fast alle, AR, MA, $ARMA$, $ARIMA$ und Random Walk.

Wieso kann man also für alle eine optimale Vorhersage angeben?
Ortogonalitätslemma zitiert, das genau beschreibt, wann es sich bei einer gewissen Vorhersage um die beste handelt.

Wie funktioniert der Kalman-Filter?
Man berechnet aus $\hat{X}_t$ zuerst $\tilde{X}_{t+1}$ und dann $\tilde{Y}_{t+1}$. Dann nimmt man an, dass man das tatsächliche Y_{t+1} beobachtet und will nun $\tilde{X}_{t+1}$ zu $\hat{X}_{t+1}$ updaten (über den Kalman-Filter).

Welches Problem ergibt sich dabei?
Die richtige Wahl der Startwerte. Diese spielen aber bei immer weiter fortschreitenden Werten keine Rolle mehr.

Abschlussfrage: Wie hängen $ARCH$-Prozesse mit AR-Prozessen zusammen?
Ein stationärer und kausaler $ARCH$-Prozess, bei dem auch der quadrierte Prozess stationär ist ist ein AR-Prozess mit gleicher Ordnung.

ENDE