Lineare Algebra Vordiplomsprotokoll

Datum: 20.09.2006
Prüfer: Prof. Dr. Peter Müller
Note: 1.0

Wie misst man die Größe eines Vektorraums?
Die Größe eines Vektorraums ist die Dimension, d.h. die Anzahl der Basisvektoren. Dies ist die Anzahl an Vektoren, die man für ein linear unabhängiges Erzeugendensystem benötigt oder die Anzahl an Vektoren, die ein minimales Erzeugendensystem bilden, oder die maximal mögliche Anzahl linear unabhängiger Vektoren oder die Anzahl an Vektoren, die man benötigt um jeden Vektor des Vektorraums eindeutig darstellen zu können.

Wieso ist die Dimension eindeutig?
Das folgt aus dem Austauschsatz von Steinitz.

Besitzt jeder Vektorraum eine Basis?
Für endlich erzeugte Vektorräume haben wir dies in der Vorlesung gezeigt. Allgemein haben Sie aber erwähnt, dass alle Vektorräume eine Basis besitzen. Hierfür benötigt man aber das Lemma von Zorn, das gleichbedeutend mit dem Auswahlaxiom ist.

An das Auswahlaxiom muss man aber nicht unbedingt glauben.

Nennen Sie einen unendlich dimensionalen Vektorraum, von dem Sie die Basis angeben können.
Der Vektorraum der reellen Polynome. Die Basis ist dann $1, x, x^2, \dots$.

Für endlich dimensionale Vektorräume gilt ja bekanntlich surjektiv $\Leftrightarrow$ injektiv $\Leftrightarrow$ bijektiv. Gilt dies auch für unendlich dimensionale Vektorräume?
Nein, da zum Beispiel die injektive Abbildung $f(x) \mapsto xf(x)$ im Vektorraum der reelen Polynome nicht surjektiv ist, da die 1 kein Urbild besitzt. Ebenso ist die Abbildung, die die 1 und x auf 1 und x^2 und x^3 auf x usw. abbildet surjektiv aber nicht injektiv, da jedes Bild zwei Urbilder besitzt.

Nennen Sie mir einen Vektorraum mit 27 Elementen.
(*Zuerst viel mir nur ein, dass jeder Körper ein Vektorraum über sich selbst ist*) Da 27 eine Primzahl ist, kann man einen Körper mit 27 Elementen wählen und diesen dann als Vektorraum verwenden.

Eigentlich ist 27 lediglich eine Primpotenz. Vielleicht hilft das Ihnen weiter.
Mann kann als Vektorraum $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ über drei Koordinaten wählen. Dieser hat $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot = 27$ Elemente.

Wie Sie wissen kann man Endomorphismen durch darstellende Matrizen beschreiben. Wie dies funktioniert ist Ihnen sicher bekannt.
Ja, man wählt die Basen fest, bildet dann den ersten Basisvektor ab und schaut welche Vektoren der zweiten Basis man für diese benötigt. Diese Vorfaktoren bilden die erste Spalte

der Darstellungsmatrix. Analog bildet man den zweiten sowie die weiteren Basisvektoren und erhält auf diese Weise die Darstellungsmatrix.

Erläutern Sie mir mal, was man an einer Darstellungsmatrix ablesen kann.
Zum einen kann man, wie eben erläutert ablesen, wie die Basis abgebildet wird. Zum anderen kennt man die Dimension des Vektorraums, da dies die Größe der Darstellungsmatirx ist. Kennt man außerdem den Rang der Matrix, so auch die Dimension des Bildes, da diese gleich dem Rang der Matrix ist. Außerdem ist die Dimension des Kerns der Abbildung bekannt, da diese nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen genau die Dimension des Vektorraums minus der Dimension des Bildes ist.

Wie ist eigentlich der Rang einer Matrix definiert?
Der Rang einer Matrix ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten der Matrix oder gleich der Dimension des von den Spalten erzeugten Unterraums.

Was ist jetzt, wenn man statt der Spalten die maximale Anzahl linear unabhäniger Zeilen betrachtet.
Das ist egal, da wir bewiesen haben, dass Spaltenrang gleich Zeilenrang ist.

Zurück zu den Darstellungsmatrizen. Man ist ja nun bemüht „schönere“ Formen für diese zu erhalten. Wie erreicht man das?
Existiert eine Basis aus Eigenvektoren, so wählt man diese Basis als Basis seines Vektorraums und dann hat die Matrix Diagonalgestalt.

Dies ist nun der Idealfall. Wie geht man vor wenn dies nicht funktioniert?
Wenn das Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt, dann kann man eine Jordannormalform aufstellen. Man erhält so eine Matrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen und einer Nebendiagonalen mit lauter Einsen. Zerfällt das Minimalpolynom nicht in Linearfaktoren, so kann man immer eine Frobeniusnormalform aufstellen.

Schreiben Sie mir einmal ein Frobeniuskästchen zu einem beliebigen Minimalpolynom auf.
Aufschreiben eines Frobeniuskästchens zum Minimalpolynom $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$

Und wie würde dann eine Frobeniusnormalform aussehen?
Diese hat dann eine Blockdiagonalform mit lauter Frobeniuskästchen auf der Diagonalen.

Nun zeichnen Sie mir noch ein Jordankästchen.
Aufschreiben eines allgemeinen Jordankästchens

Wie ist die geometrische Vielfachheit eines Jordankästchen?
Diese ist Eins, da lediglich der letzte Basisvektor auf λ mal sich selbst abgebildet wird. Also ist nur dieser ein Eigenvektor. Die anderen sind Hauptvektoren. Damit ist die Dimension des Eigenraums gleich 1 und dies ist die geometrische Vielfachheit.

Und wie groß ist die algebraische Vielfachheit?
Dies ist genau die Größe des Jordankästchens.

Kann diese beliebig groß sein?

Ja, da diese lediglich davon abhängt, welche Vielfachheit eine Nullstelle im Minimalpolynom hat und dies kann auch beliebig groß sein.

Wie ist eigentlich die Definition des Minimalpolynom?
Bekanntermaßen besitzt jeder Vektorraum ein annullierendes Polynom. Das Minimalpolynom ist das gradmäßig kleinste Polynom, das einen Endomorphismus annulliert.

Man nimmt noch normiert hinzu, damit es eindeutig ist. Wie ist das charakteristische Polynom definiert?
Schreibe die Definition $det(X \cdot E - A)$ *aufs Blatt*

Nun sind die Definitionen von diesen beiden Polynomen doch sehr unterschiedlich. Welche Gemeinsamkeiten besitzen diese dennoch?
Nach dem Satz von Cayley-Hamilton annuliert das charakteristische Polynom auch den Endomorphismus. Da das Minimalpolynom das gradmäßig kleinste Polynom ist, das dies tut, teilt das Minimalpolynom folglich das charakteristische Polynom. Außerdem ergibt sich aus dem Beweis des Satzes, dass charakteristisches Polynom und Minimalpolynom gleiche irreduzieble Teiler und somit auch gleiche Nullstellen besitzen.

Kommen wir zurück zum Normalformenproblem. Dieses ist uns ja auch bei Bilinearformen begegnet. Wie sehen dort „Normalformen“ aus?
Diese ergeben sich hierbei aus dem Trägheitssatz von Sylvester, der besagt, dass für jede reelle symmetrische Matrix eine Matrix W existiert, sodass gilt
$W^T SW = Diag(1, 1 \dots\ 1, -1, -1, \dots\ 0, 0, \dots\ 0)$. Für allgemeine Vektorräume folgt die Normalform aus dem Satz von Jakobi, der besagt, dass für jede symmetrische Matrix eine Matrix existiert, sodass $W^T SW$ Diagonalform besitzt.

Gilt dies wirklich für allgemeine Vektorräume?
Nein, es muss $0 \neq 2$ gelten.

Zurück zu Endomorphismen. Betrachten wir nun den $\mathbb{R}^2$. Welche Abbildungen gibt es dort die Längen und Winkel erhalten?
Dies sind Drehungen und Spieglungen.

Wie heißen solche Abbildungen allgemeiner?
Dies sind die orthogonalen und unitären Abbildungen.

Auch hier haben wir uns mit Normalformen beschäftigt. Wie sehen diese aus?
Wiedergeben von Satz 16.8

Wie würde diese Normalform in einem komplexen Vektorraum aussehen?
(*Nach einiger Überlegung*:) Unitäre Abbildungen sind insbesondere normal also existiert nach dem Spektralsatz eine Othonormalbasis aus Eigenvektoren. D.h. die Matrix hat Diagonalform. Da in unitären Vektorräumen jeder Eigenwert den Betrag 1 hat ist die Matrix also eine Diagonalmatrix auf der in der Diagonalen nur Elemente von Betrag 1 stehen.

Was ist denn nun eine adjungierte Abbildung?
Schreibe die Definition von adjungiert auf

Existiert diese immer und ist diese eindeutig?
In endlich dimensionalen Vektorräumen existiert diese immer und ist eindeutig. In unendlich dimensionalen Vektorräumen muss diese – wie wir in der Übung gezeigt haben – nicht unbedingt existieren.

Ist die Adjungierte in unendlich dimensionalen Vektorräumen eindeutig, wenn sie existiert?
Ja, schon, die Endlichkeit des Vektorraums haben wir im Beweis der Eindeutigkeit nicht verwendet.

Können Sie auch den Beweis?
Nach mehreren Versuchen habe ich den korrekten Beweis aufs Blatt bekommen

Beschreiben Sie mir einmal den Gausalgorithmus?
Beschreiben wie man eine Matrix auf Zeilenstufenform bringt

Sie haben hierfür Zeilenvertauschungen, Multiplikationen von Zeilen mit Skalaren und Addition von vielfachen von Zeilen zu anderen verwendet. Benötigen Sie wirklich alle diese drei elementaren Umformungen?
Ja

Nein, Zeilenvertauschungen können sie auch durch die anderen beiden erreichen.
Er erläutert mir, wie es genau funktioniert und erwähnt, dass man so z.B. bei Computerprogrammen Speicherplatz sparen kann. Genau nachvollziehen, wie es gehen soll, konnte ich nicht.

Wie kann man bei einer Matrix feststellen ob sie invertierbar ist?
Man bestimmt mit dem Gaußalgorithmus den Rang der Matrix. Hat die Matrix vollen Rang, dann ist sie invertierbar. Man kann auch die Determinante berechnen. Ist diese $\neq 0$, dann ist die Matrix invertierbar.

Sie sprechen Determinanten an. Nennen sie mir einmal den Determinantenmultiplikations- und Additionssatz.
Der Multiplikationssatz lautet: $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$. Einen Additionssatz gibt es nicht, da z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt und für die Determinanten $1 + 1 \neq 0$

Wie beweist man $detA^T = detA$?
In der Übung haben wir bewiesen, dass A^T und A ähnlich sind (*Herr Müller war etwas überrascht, dass wir diesen schwierigen Beweis wirklich in der Übung gemacht hatten, ist dann aber nicht weiter darauf eingegangen*). Da ähnliche Matrizen gleiche Determinante haben ist dann der Beweis trivial. Mann kann es aber auch über die Definition der Determinanten beweisen. *Grobe Skizzierung des Beweises zu Satz 9.13*

Können sie auch beweisen, dass in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper jeder Endomorphismus durch eine obere oder untere Dreiecksmatrix darstellbar ist.
In einem algebraisch abgeschlossenen Körper existiert immer die Jordannormalform. Diese ist eine obere Dreiecksmatrix.

Kann man das auch anders beweisen?
Ja, mit Hilfe von Faktorräumen. Man führt eine Induktion über die Dimension des Vektorraums durch. Da der Körper algebraisch abgeschlossen ist, existiert ein Eigenvektor. Betrachtet man $V/_{<v_E>}$, so hat dieser Faktorraum die Dimension $n-1$ und man kann die Induktionsvorraussetzung darauf anwenden. Rückrechnen in den eigentlichen Vektorraum ergibt dann die Behauptung.

ENDE

Es herrscht eine angenehme Prüfungsatmosphäre. Prof. Müller stellt seine Fragen so, dass man sie gleich versteht und lässt einem auch Zeit kurz über diese nachzudenken.
Ich hatte den Eindruck, dass es ganz gut ankommt, wenn man zu einer Frage mehrere Lösungsmöglichkeiten parat hat und etwas weitschweifender antwortet. Man sollte nicht zu viel aufschreiben, da dort jeder Fehler gleich offensichtlich wird. So hatte ich einige Probleme mit dem Beweis der Eindeutigkeit der Adjungierten, da ich diesen schriftlich anfertigen sollte. Zu den übrigen Beweisen genügte ihm eine sehr grobe mündliche Beweisskizze. Insgesamt kann ich Prof. Müller als Prüfer ohne Bedenken weiterempfehlen.