Lineare Algebra I

Einleitung

Kurze Mengenlehre (vgl. Analysis)

Def. Relation:
Eine Relation ist eine Teilmenge von A x A. Mögliche Eigenschaften

Def. Äquivalenzrelation:
Eine Relation mit den Eigenschaften: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität

Def. Äquivalenzklasse
Für eine Äquivalenzklasse sind die folgenden Aussagen qäuvalent:
(i) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$
(ii) $x \sim y$
(iii) $[x] = [y]$

Beweis: (i) => (ii) Sei a Element der Vereinigung → Transitivität folgt ii
(ii) => (iii) Beidseitige Inklusion durch beliebiges Element der Qauivalenzklassen.
(iii) => (i) klar

Korollar
Die Äquivalenzklassen bilden eine disjunkte (elementfremde) Zerlegung von A.

Def. Abbildung oder Funktion
Eine Relation, die jedem Element aus A genau ein y aus B zuordnet. x~y und x~z => y=z

Def. surjektiv, injektiv, bijektiv

Surjektiv: Jedes Bild besitzt mindestens ein Urbild
Injektiv: Wenn jedes Bild höchstens ein Urbild besitzt
(Urbilder ungleich => Bilder ungleich, Bilder gleich => Urbilder gleich)
Bijektiv: Surjektiv und Bijektiv

Verschiedene Beweistechniken (Direkt, Induktion, Widerspruchsbeweis)

Gruppen

Eine Gruppe besteht aus einer Menge G und einer Abbildung G x G → G $(a,b) \mapsto a \circ b$, mit folgenden Eigenschaften:

a) Assoziativität $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle a,b,c
b) Neutrales Element $e \circ a = a$ für alle a
c) Inverses Element $a^{-1} a = e$ für alle a existiert a^{-1}

Gilt zusätzlich
d) Kommutativität $a \circ b = b \circ a$
so nennt man G abelsch oder kommutativ.

Satz
Linksneutrale sind Rechtsneutral. Es existiert genau ein neutrales Element. Rechtsinverse sind Linksinvers. Gleichungen ax = b und ya = b sind jeweils eindeutig lösbar.
Beweis: Geschicktes Anwenden der Gruppenbedinungen.

Korollar
Es gilt $(a^{-1})^{-1} = a$ $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

Def. Untergruppe

Untergruppenkriterium $a \circ b^{-1} \in U$ für a und b beliebig.

Def. Rechts- und Linksnebenklasse

Durch g ~ h :<=> Ug = Uh wird eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

Lemma

Die Äquivalenzklasse von g ist genau die Nebenklasse Ug.
Beweis: Beidseitige Inklusion

Lemma

Für alle Nebenklassen gilt |Ug| = |U|
Beweis: Die Abbildung $U \to Ug \quad u \mapsto ug$ ist bijektiv.

Satz von Lagrange

Sei U eine Untergruppe der endlichen Gruppe G. Dann ist |U| Teiler der Mächtigkeit von |G|.
Beweis: Ug ist eine disjunkte Vereinung gewisser Rechtsnebenklassen. Jede dieser Klassen hat |U| Elemente => |U| teilt |G|.

Def. Normalteiler

Def.Satz

Sei N ein Normalteiler von G. Auf der Menge der Nebenklassen G/N (Faktorgruppe, Quotientengruppe) von N in G wird durch (Nx)(Ny) = Nxy ein Produkt definiert, das G/N zu einer Gruppe mit Neutralem Element N macht.
Beweis: Zuerst Produkt ist wohldefiniert (unterschiedliche x und y mit gleichen Nx Ny liefern gleiches Produkt). Dann Nachweis der Gruppeneigenschaften.

Def. Homomorphismus

Das Neutrale Element wird auf das Neutrale Element der anderen Gruppe abgebildet. Außerdem gilt: $\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$.

Def. Monomorphismus (injektiv), Epimorphismus (surjektiv), Isomorphismus (bijektiv)

Def.Lemma

Der Kern (Kern φ) eines Homomorphismus besteht aus den $g \in G$ mit $\varphi(g) = e_H$. Kern φ ist ein Normalteiler von G.
Beweis: Erst Untergruppeneigenschaften. Dann für alle $g \in G$ und $k \in$ Kern gilt $gkg^{-1} \in$ Kern.

Die möglichen Kerne eines Homomorphismus sind die Normalteiler von G.

Satz (Homomorphiersatz)

Sei $\varphi : G \to H$ ein Epimorphismus, dann sidn die Gruppen $G/\text{Kern}\varphi$ und H isomorph.

Def. Permutationen, Zykelschreibweise, Transposition

Satz (Jede Permutation ist ein Produkt von Transpositionen)

Beweis: Jede Permutation ist Produkt von Zykeln. Nur zu zeigen, dass jeder Zykel ein Produkt von Transpositionen ist: Vollständige Induktion

Def. Funktion f

Lemma

Sei ∂ ein Produkt von m Transpositionen (m ist nicht eindeutig). Dann gilt $m \equiv f(\partial) \mod 2$.
Beweis: Vollständige Induktion

Def. Signum-Funktion

Diese ist ein Gruppenhomomorphismus.
Beweis: Berechnen

Def. Gerade, Ungerade, Alternierende Gruppe

Gerade Permutationen lassen sich als eine gerade Anzahl von Transpositionen darstellen.

Ringe

Eine Menge R mit zwei zweistelligen Verknüpfungen + und · und Elementen 0 und 1 heißt Ring, wenn folgendes gilt:

1. (R,+) ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0
2. Das Produkt · ist assoziativ und es gilt $a \cdot 1 = 1 = 1 \cdot a$ für alle a
3. Es gelten die Distributivgesetzte
   $a \cdot (b + c) = ab + ac$ $\quad$ $(a + b) \cdot c = ac + bc$

Falls zusätzlich gilt

4. $ab = ba$ für alle a,b

heißt R kommutativ.

Def. Ringhomomorphismus

Def. Ideal

Eine Untergruppe von R. Bei der außerdem $a \cdot i \in J$ für alle r aus dem Ring und i aus dem Ideal.
Neutrales und ganzer Ring sind immer Ideale.

Bemerkung: Kerne sind stets Ideale und Ideale sind stets Kerne geeigneter Homomorphismen.

Def.Satz

Sei J ein Ideal eines kommutativen Ringes R, und R/J die Faktorgruppe der Abelschen Gruppe (R,+) und (J,+), dass wird durch $(J + x)(J + y) := J + xy$ ein Produkt definiert, das R/J zu einem Ring macht.
Die Abbildung

$$R \to R/N$$
$$r \mapsto J + r$$

ist ein Ringhomomorphismus mit Kern J.
Beweis: Wohldefiniertheit + Ringaxiome

Körper

Ein Kommutativer Ring k heißt Körper, wenn es für alle $a \in K \setminus \{0\}$ ein $b \in K$ mit ab=1 gibt.

Ein Ring ist genau dann ein Körper, wenn $(R \setminus \{0\})$ eine abelsche Gruppe ist.

Satz

Sei p eine Primzahl, dann ist $K = \mathbb{Z}/nZ$ ein Körper mit p Elementen.

Vektorräume

Sei K ein Körper und (V,+) eine abelsche Gruppe. V heißt Vektorraum über K (oder K-Vektorraum) wenn es eine Abbildung $K \times V \to V$ gibt mit

a) Gemischte Assoziativität $\quad (a\, b)\, v = a\, (b\, v)$
b) Gemischte Distributivität $\quad (a + b)\, v = av + bv$
   $a\, (u + v) = au + av$
c) Normierung $\quad 1\, v = v$ $\quad$ Für alle v

Def. Unterraum

V heißt Unterraum, wenn (U,+) eine Untergruppe von (V,+) ist, und a u $\in$ U ist für alle u.
Ist U ein Unterraum von V, dann ist U selber ein K-Vektorraum.

4.4 Satz

Schnitte beliebig vieler Unterräume von V sind wieder Unterräume.
Beweis: Element aus Schnitt (und somit auch aller Unterräume) erfüllt alle Eigenschaften.

4.5 Def. Linearkombination

4.6 Satz

Die Menge aller Linearkombinationen <M> ist ein Unterraum von V. <M> ist der kleinste Unterraum von V, der M enthält. <M> heißt Erzeugnis von M.
Beweis: Relativ klar.

4.7 Def. Summe von Unterräumen $U_1 + U_2$

Entweder $< U_1 \cup U_2 >$ oder allen Elementen der Form $u_1 + u_2$

4.9 Def. Erzeugnissystem

4.10 Def. Lineare Unabhängigkeit

4.11 Lemma

Sei M ein Erzeugendensystem. Dann sind äquivalent:
(i) M ist minimales Erzeugendensystem
(ii) M ist linear unabhängig

Beweis: (i) => (ii) Annahme linear abhängig (Linearkombi), dann kein minimales Erzeugendensystem
(ii) => (i) Linear Unabhänge Menge kleiner als M => Widerspruch zu Erzeugendensystem

4.12 Bemerkung

Sei M linear unabhängig. Dann sind äquivalent
(i) $v \notin <M>$
(ii) $M \cup \{v\}$ linear unabhängig

Beweis: (i) => (ii) Indirekt $M \cup \{v\}$ abhängig $\rightarrow v \in <M>$
(ii) => (i) Indirekt: Falls v im Erzeugnis $\rightarrow$ linear abhängig

4.13 Def. Basis

4.14 Satz

Sei V ein Vektorraum, und $B \subseteq V$, dann sind äquivalent:
(i) B ist minimales Erzeugendensystem von V
(ii) B ist eine Basis
(iii) B ist maximal linear unabhängige Teilmenge
(iv) Jedes Element von v hat eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Elementen aus B.

Beweis: (i) <=> (ii) Lemma 4.11
(ii) <=> (iii) Bemerkung 4.12
(ii) => (iv) Falls es zwei gibt, sind diese gleich
(iv) => (ii) Falls es kein minimales Erzeugnissystem ist, existieren zwei Darstellungen

4.15 Satz

Ein endlich erzeugter Vektorraum besitzt eine Basis.
Beweis: Ein endliches Erzeugendensystem besitzt eine Teilmenge, die ein minimales Erzeugendensystem ist.

4.16 Austauschsatz von Steimtz

Eine Menge linear unabhängiger Vektoren lässt sich durch geeignete Hinzunahme von Vektoren einer Basis zu einer Basis ergänzen.
Beweis: Vollständige Induktion --- lang ---

4.17 Korollar

Je zwei endliche Basen eines Vektorraums haben die gleiche Mächtigkeit.

4.18 Def. Dimension

4.19 Lemma

Sei dim V < ∞ und U $\subseteq$ V ein Unterraum => U besitzt Basis.
Beweis: Nach Steimtz und maximale linear unabhängige Menge.

4.20 Lemma

Sei dim V $<\infty$ und U $\subseteq$ V ein Vektorraum. Dann git dim U $\leq$ dim V, mit dim U = dim V $\Leftrightarrow$ U = V.
Beweis: Basis von U lässt sich zu Basis von V ergänzen.

4.21 Dimensionssatz für Unterräume.

Sei U und W endlichdimensionale Unterräume von V. Dann gilt:

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim U + W$$

Beweis: Ausgehend von $U \cap W$ Basisergänzungen. Zeigen, dass die Gesamtergänzung eine Basis von U + W ist.

Koordinaten und Matrizen

5.1 Def. Homomorphismus (Lineare Abbildung) bei Vektorräumen

5.2 Def. Koordinatenvektor

5.3 Satz

V ist isomorph zu K^n und n = dim V. Genauer gilt:
$\varphi : V \to K^n, \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ ist ein Homomorphismus.
Beweis: Bijektion wegen eindeutiger Basisdarstellung Klar. Rest berechnen.

5.4 Satz

Satz darüber, wie die Basen eines Vektorraums zusammenhängen.

5.5 Def. (m x n)-Matrix

m – Zeilen, n – Spalten
Einheitsmatrix

5.6 Def. Rang einer Matrix

Der Rang ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten.
Der Rang einer Matrix ist gleich der Dimension der von den Spalten erzeugten Unterraums.

5.8 Elementare Spaltenformungen 5.9 Rang ändert sich dabei nicht

Unter dem Zeilenrang versteht man die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen. Dies alles (Umformungen) gilt analog für elementare Zeilenoperationen.

5.11 Def. Zeilenstufenform

5.12 Satz (Gauß Algorithmus)

5.13 Satz

Die Matrix A sei durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform gebracht worden. Die Anzahl der Zeilen $\neq$ Nullvektor dieser Matrix ist gleich dem Zeilenrang.

5.14 Satz

Elementare Zeilenoperationen ändern nicht den Spaltenrang einer Matrix, und elementare Spaltenoperationen ändern nicht den Zeilenrang.
Beweis: Nachrechnen, dass Lineare Unabhängigkeit nicht verändert wird.

5.15 Satz

Durch eine Folge elementarer Zeilen und Spaltenoperationen lässt sich jede Matrix auf die Form bringen

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Beweis: Gaußalgorithmus auf Zeilen und Spalten

5.16 Satz (Zeilenrang = Spaltenrang)

Beweis: Folgt aus Satz 5.15.

Matrixmultiplikation

Skalarprodukt der i-ten Zeile der ersten Matrix mit der k-ten Spalte der zweiten Matrix.

Für ein Matrixprodukt gelten folgende Rechenregeln:

$(\lambda A) B = A (\lambda B) = \lambda (AB)$ $\quad$ $A (B+C) = AB + AC$

$(A + B) C = AC + BC$ $\quad$ $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$(AB)^t = B^t \cdot A^t$

Die (n x n) Matrizen über einem Körper K bilden einen Ring, der für $n \geq 2$ nicht kommutativ ist. Das Neutrale Element ist die Einheitsmatrix.

Lineare Abbildungen und Matrizen

Eine Lineare Abbildung ist schon durch die Werte $\varphi(b)$ der Basis eindeutig gegeben.

7.1 Satz

Seien V' und W' Unterräume von V bzw. W. Dann ist φ(V') ein Unterraum von W und φ^{-1}(W') ein Unterraum von V.
Beweis: Basisabbildung

7.2 Def. Bild φ und Kern φ

Nach Satz 7.1 Sind Bild φ und Kern φ Unterräume von W bzw. V.

7.3 Lemma (Injektitivität der Abbildung äquivalent zu Kern(φ)={0})

Beweis: <= Indirekt: Kern ungleich Null → nicht injektiv
=> Indirekt: Nicht Injektiv => Kern ungleich Null

7.4 Lemma (Es gilt $\varphi(<M>) = <\varphi(M)>$)

Beweis: Beidseitige Inklusion

7.5 Dimensionssatz für lineare Abbildungen

$$\dim V = \dim Kern(\varphi) + \dim Bild(\varphi)$$

Beweis: Basisergänzung + Dimensionssatz für Unterräume.

7.6 Korollar

Gilt dim V = dim W, dann sind äquivalent: φ ist injektiv ⇔ surjektiv ⇔ bijektiv

7.7 Def. Darstellungsmatrix

7.8 Def. Koordinatenabbildung

7.8 Satz

Es gilt $M_{\beta\alpha}(A,C) = M_\alpha(B,C) \cdot M_\beta(A,B)$

Beweis: Nachrechnen

7.9 Satz

Für einen endlich dimensionalen Vektorraum ist die Lineare Abbildung α: V → W genau dann ein Isomorphismus, wenn eine (und damit alle) darstellenden Matrizen von α invertierbar sind. Insbesondere gilt für Basen A, B von V bzw. W

$$M_\alpha(A,B)^{-1} = M_{\alpha^{-1}}(B,A)$$

Beweis: => Darstellungsmatrix der Identität ist die Einheitsmatrix. → Matrixen invertierbar

<= ???

7.10 Korrollar

Basistransformationen sind invertierbar und jede Invertierbare Matrix beschreib eine Basistransformation. Die inverse Basistransformation wird durch die inverse Matrix beschrieben.

7.11 Satz

Seinen V, W Vektorräume mit Basen A, A' von V und B, B' von W. Seien P und q die Basistransformationsmatrixen von A nach A' und B nach B'. Dan gilt

$$M_\alpha(A',B') = Q^{-1} \cdot M_\alpha(A,B) \cdot P$$

Beweis: Direkt nach Satz 7.8

Für V = W und A = B und A' = B' folgt $M_\alpha(A',B') = T^{-1} \cdot M_\alpha(A,B) \cdot T$

7.13 Satz

Sei A die darstellende Matrix von K^n → K^m definiert durch $\varphi(v) = Av$.

Dann gilt Rang A = dim Bild(φ).

Beweis: $\varphi(e_i) = a_i\ (i-te\ Spalte)$, Definition von Rang → Beh.

7.14 Satz

Es gibt Basen B von V und C von W, so dass gilt

$$M_\alpha(B,C) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad mit\ r = \dim Bild(\alpha)$$

Beweis: Basis von Bild(α) + Basis von Kern(α) = B.

7.15 Folgerung

Sei $A \in K^{mxn}$ und r =Rang A, dann gibt es Invertierbare Matrixen $S \in K^{mxm}$ und $T \in K^{nxn}$ so dass gilt

$$S^{-1}A\ T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.16 Korollar

1) rang A = rang A^T $\qquad A \in K^{mxn}$
2) rang A ≤ min {m,n}
3) rang AB ≤ min{rang A, rang B}
4) Für invertierbare Matrixen $P \in K^{mxm}$ und $Q \in K^{nxn}$ gilt: rang (A) = rang (Q A P)

7.17 Satz

Für $A \in K^{mxn}$ gilt rang A = n ⇔ A ist invertierbar.

Beweis: => Folgt aus Satz 7.15 mit B = T S^{-1} → B A = E

<= Nach 7.9 ist Die Standardabbildung ein Isomorphismus also bijektiv. Somit folgt Rang A = n, da das Bild(α) von den Spalten von A erzeugt wird.

7.18 Def. äquivalent, ähnlich

7.19 Satz

Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzklasse hat einen Repräsentanten der Form $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A,B sind äquivalent ⇔ rang A = rang B

Lineare Gleichungssysteme

Def. Lineare Gleichungssysteme / homogen

In Matrixschreibweise: Ax = b

8.2. Satz

Ax = b ist genau dann lösbar, wenn rang A = rang (A|b). Insbesondere ist Ax = b im Fall von rang A = m stets lösbar.

Beweis: => hat nur eine Lösung, falls b Linearkombi der Anderen ist

<= Spalten erzeugen Gleichen Unterraum

8.3 Satz

Die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems Ax = 0 ist ein Unterraum von K^n der Dimension: n – rang A

Beweis: Lösungsmenge ist Kern φ. Das Bild(φ) ist das Erzeugnis der Spalten von A. Dimensionsformel.

Bemerkung: ist m < n, d.h. die Anzahl der Gleichungen ist kleiner als die Anzahl der Unbekannten, dann hat das System Ax = 0 nicht nur die triviale Lösung.

8.4 Satz

Hat das System Ax = b eine Lösung x_0 dann ist die Lösungsmenge von Ax=b gleich

$x_0 + L = \{x_0 + v \mid v \in$ Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems$\}$

Beweis: Ausrechnen $A(x_0 + v) = ...$

Vorsicht: Die Lösungsmenge von Ax = b ist i.a. kein Unterraum. Auch für m<n muss das System Ax=b keine Lösung haben.

8.5 Satz

Sei: m = n. A eine quadratische Matrix. Dann sind äquivalent:

i) Ax = 0 hat nur die triviale Lösung
ii) Ax = b ist für alle $b \in K^n$ lösbar
iii) rang A = n
iv) A ist invertierbar

Beweis: (i) <=> (iii) nach Satz 8.3

(iii) <=> (iv) nach Satz 7.17

(iv) <=> (ii) Da A invertierbar gilt AB = 1. Setzte x=B·b

(ii) <=> (i)

Determinanten

Def. Multilinearform / Bilinearform

Vorsicht: Multilinearformen sind i.a. keine lineare Abbildungen.

9.2 Def. Alternierende Multilinearform / Ausgeartete Multilinearform
Alternierend: $\varphi = 0$ für alle linear abhänigen Tupel

9.3 Lemma
Es sind äquivalent:
(i) φ ist alternierend
(ii) $\varphi(v_1, v_2, ..., v_n) = 0$, falls i $\neq$ j mit $v_i = v_j$
Beweis: (ii) => (i) v ist Linearkombi der Anderen einsetzten und ausrechnen

9.4 Lemma
Es gilt $\varphi(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, ... v_{\pi(n)}) = sign\,\pi \cdot \varphi(v_1, v_2, ... v_n)$.
Beweis: Es gilt für jede Transposition.

9.5 Lemma
Sei $v_1, v_2, ... v_n$ ein Basis und $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, dann gilt $\varphi(u_1, u_2, ... u_n) = \varphi(v_1, v_2, ... v_n) \cdot \sum_{\pi \in S_n} sign\,\pi \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot ... \cdot a_{n\pi(n)}$
Beweis: Einsetzen und Nachrechnen.

9.6 Lemma
Für eine nicht ausgeartete alternierende n-Linearform sind äquivalent (dim V = n):
(i) $\varphi(v_1, v_2, ..., v_n) = 0$
(ii) $v_1, v_2, ..., v_n$ sind linear abhängig
Beweis: (i) => (ii) Indirekt: Linear Unabhängig → Basis → Nach Lemma 9.5 wäre es dann ausgeartet.

9.7 Satz
Die Abbildung $\varphi(u_1, u_2, ... u_n) = \sum_{\pi \in S_n} sign\,\pi \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot ... \cdot a_{n\pi(n)}$ mit $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ ist eine nicht ausgeartete alternierende n-Linearform.
Beweis: Alles Nachrechnen
Bem: Ist φ eine nicht ausgeartete alternierende Multilinearform, dann gilt das auch für $a \cdot \varphi$.

9.8 Satz
Sind $\varphi\, und\, \psi$ nicht ausgeartete n-Linearformen. Dann gilt $\varphi = a \cdot \psi$.
Beweis: Folgt fast aus Lemma 9.6 und 9.5

9.9 Def Determinante
$$\det \alpha = \frac{\varphi(\alpha(v_1), ..., \alpha(v_n))}{\varphi(v_1, ..., v_n)}$$
φ nicht ausgeartete alternierende n-Linearform, v_i Basis

9.10 Satz (Die Definition der Determinanten hängt nicht von der Basis und nicht von φ ab)

9.11 Determinantenmultiplikationssatz
Sei dim V < ∞, dann gilt:
1. $\det \alpha\beta = \det \alpha \cdot \det \beta$
2. $\det \alpha \neq 0 \iff \alpha$ invertierbar
3. α invertierbar => $\det(\alpha^{-1}) = (\det \alpha)^{-1}$

Beweis: 2. det α ≠ 0 → linear unabhängig → invertierbar 1. Geschickte Erweiterung der Definition 3. Folgt aus 1. mit det 1 = 1

9.12 Determinanten von Matrizen

Regel von Sarrus

9.13 Satz (det A^T = det A)
Beweis: Folgt direkt aus Satz 9.7 mit sign(π^{-1}) = sign(π).

9.14 Satz
Sei A eine Matrix und α ein Endomorphismus, definiert durch α(v) = A · v. Dann gilt: det α = det A.

9.15 Satz
a) det A' = sign π · det A   π : Permutation der Zeilen (oder Spalten)
b) Addiert man zu einer Spalte oder Zeile ein Vielfaches einer anderen hinzu, so ändert sich die Determinante nicht.
c) Multipliziert mein eine Zeile oder Spalte mit c, so multipliziert sich die Determinante mit c
d) det A = 0 ⇔ rang A < n
e) det 1_n = 1,   det cA = c^n det A
f) det (AB) = det A · det B
g) Sei A invertierbar, dann gilt det A^{-1} = (det A)$^{-1}$
h) Sind A und B ähnlich => det A = det B

Beweis: a) Lemma 9.6, b) c) nachrechnen, d) Lemma 9.6, e) aus Definition und c, f) folgt aus Determinantenmultiplikationssatz, g) folgt aus f, h) Anwendung von f auf det A = det $T^{-1}AT$

9.16 Satz
Sei A eine obere Dreiecksmatrix, dann gilt: det A = $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.
Beweis: Aus Definition. Summanden nur für π = id ungleich 0.

9.17 Satz
Die Matrix A habe die Form $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Dann gilt det A = det B · det C
Beweis: Zeilenumformungen auf B und D → Satz 9.16

9.18 Def. Adjungte Matrix
$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{i,j}$ und $adj\, A = (A_{ji})$

9.19 Satz (Laplace)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{(Entwicklung nach i-ter Zeile)}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{(Entwicklung nach j-ter Spalte)}$$

Beweis: Wegen det A = det A^T genügt es die zweite Aussage zu beweisen. Dies durch Definition und Ersetzung durch ein B_i, das die j-te Spalte durch e_j ersetzt. Dann gilt $\det\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} B_i$. Durch Zeilenvertauschungen B_i auf Blockdiagionalform, dann mit 9.17.

9.20 Satz
Es gilt $A \cdot adj\, A = (adj\, A) \cdot A = (\det A) \cdot E$. Insbesondere: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj\, A$.
Beweis: Betrachte Position (i,j) diese ist nach 9.19 für i=j gleich det A. Für i ≠ j gleich det B = 0.

9.21 Korollar (Cramersche Regel)
Wenn A invertierbar ist, hat das lineare Gleichungssystem Ax = b die eindeutige Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit

$$x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$$

Beweis: Da A invertierbar ist die lösung $x = A^{-1}b$ mit Satz 9.20.