Lineare Algebra II

Eigenwerte und Eigenvektoren

Def. Eigenvektor, Eigenwert

10.2 Satz
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

Beweis: Annahme linear abhängig; mit einem weniger unabhängig. Anwenden des Endomorphismus, Widerspruch

10.3 Def. charakteristisches Polynom
det (X · E – A)

10.4 Def. Eigenvektor, Eigenwert für Matrizen

10.5 Satz
Das charakteristische Polynom ist ein normiertes Polynom vom Grad n.
λ ist genau dann Eigenwert, wenn es Nullstelle des char. Polynoms ist.

Beweis: aus Definition klar – falls λ Eigenwert, so ist λ · E – A nicht invertierbar => Det Null => Nullstelle. Det Null => A – λ · E nicht invertierbar => Abbildung injektiv => DimKern > 0 #

10.6 Def. algebraisch abgeschlossen

10.7 Korollar
Matrizen über algebraisch abgeschlossenen Körpern besitzen stets Eigenwerte.

11. Polynome über Körpern

11.1 Def. Polynom, Koeffizienten, Leitkoeffizient, normiert, Menge der Polynome K[X]

11.2 Satz
grad (f + g) $\leq$ max { grad f , grad g }
grad (fg) = grad f + grad g

Beweis: Nachrechnen (letzte Formel gilt bei Ringen nicht)

11.3 Satz (Division mit Rest)
Es gibt eindeutige Polynome q, r mit f = q g + r mit grad r < grad g.

Beweis: Eindeutigkeit über Annahme von zwei, Gradformeln. Existenz: Vollständige Induktion über grad f (Leitkoeffizient abziehen und dann Indvorraussetzung anwenden)

11.4 Satz
K[X] ist ein Hauptidealring (jedes Ideal wird von einem Element erzeugt). D.h. jedes Ideal hat die Form: $J = (f) = \{h \cdot f \mid h \in K[x]\}$.

Beweis: Sei f von minimalem grad und h im Ideal 11.3 anwenden, r im Ideal => r = 0.

11.5 Satz
Ist a eine Nullstelle von f, dann gibt es f = (X – a) g.

Beweis: Anwendung von 11.3 und einsetzen von a liefert r = 0.

11.6 Def. Vielfachheit einer Nullstelle

11.7 Satz

Sei f vom Grad n. Dann gibt es ein h mit $f = (X - a_1)^{e_1} (X - a_2)^{e_2} \ldots (X - a_n)^{e_n} h$. Insbesondere gilt $e_1 + e_2 + \ldots + e_n \leq n$ (Höchstens so viele Nullstellen wie Grad).
Beweis: Vollständige Induktion über n. Sukzessives Anwenden von Satz 11.5.

11.8 Def. Ableitung auf Polynomring

Vorsicht: Aus f' = 0 folgt nicht f $\in$ K.

11.9 Satz

a ist einfache Nullstelle ⇔ f'(a) = 0

Beweis: f = (X – a) g. Einfache Nullstelle ⇔ g(a) = 0. Ableiten und einsetzten von a liefert dies.

11.10 Def irreduzibel

11.11 Def Teiler eines Polynoms g | f (g ein Teiler von f)

11.11 Satz

Es sind äquivalent:

1. f ist irreduzibel
2. Aus f | ab folgt f | a oder f | b

Beweis: => 2. falsch liefert Widerspruch <= f reduzibell, also f = ab, Widerspruch, da grad a und grad b kleiner und da Teiler größer sein muss.

11.13 Korollar

Jedes normierte Polynom hat eine eindeutige Darstellung als Produkt irreduzibler normierter Faktoren.

Beweis: Existenz durch Aufspalten. Eindeutigkeit: Annahme zweier => Widerspruch

11.14 Def. größte gemeinsame Teile, kleinstes gemeinsames Vielfache

11.15 Def. teilerfremd (ggT = 1)

11.16 Satz (Bézout)

Es gibt r,s aus K[X] mit r f + s g = ggT (f, g)
Beweis: (r f + s g) ist ein Ideal, nach 11.4 gibt es ein Erzeugendes normiertes Element, dies ist der ggT

11.17 Lemma

Sei f = q g + r eine Division mit Rest. Dann gilt ggT (f,g) = ggT (g,r)

Beweis: Aus f = q g + r folgt ggT (f,g) / f-qg = r. => ggT (f,g) / ggT (g,r). Umgekehrt gilt ggT (g,r) / f => ggT (g,r) / ggT (f,g)

Iterierte Anwendung von 11.17 liefert eine schnelle Methode zur Bestimmung größter gemeinsamer Teiler. Die Methode heißt euklidischer Algorithmus.

11.18 Bem:

Ist a eine mehrfache Nullstelle von f, dann gilt f'(a) = 0, also (X – a) teilt f und f' => (X – a) / ggT(f,f')
Daher gilt: Sind f und f' teilerfremd, dann hat f keine mehrfachen Nullstellen.

12. Direkte Summen

12.1 Def Direkte Summe

12.2 Satz

Es sind äquivalent: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... U_m$ $U_i \cap W_i = \{0\}$

Beweis: a) => b) Annahme es gibt eins => Nullelement b) => a) Annahme es gibt zwei Darstellungen

12.3 Def. α invariant

12.4 Satz

Ist V endlichdimensional und eine direkte Summe α invarianter Unterräume. Dann ist die Zusammenfassung aller Basen der Unterräume eine Basis von V und die Matrixdarstellung von α ist eine Blockdiagonalmatrix zusammengesetzt aus den Matrizen der Unterraumabbildungen.
Beweis: Nachrechnen

12.5 Def. Diagonalisierbar

12.6 Satz

Das charakteristische Polynom habe n verschiedene Nullstellen in K. Dann ist α diagonalisierbar.

Beweis: Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Diese bilden also eine Basis und wegen $\alpha(v_i) = \lambda v_i$ wird α durch eine Diagonalmatrix beschrieben.

Diagonalisierbarkeitskriterien

Eine Matrix A ist diagonalisierbar, wenn
- A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist
- Es eine Basis aus Eigenvektoren gibt. Dann ist die Transformationsmatrix T = $(t_1, t_2, \dots t_n)$
- Das char. Polynom in verschiedene Linearfaktoren zerfällt (Siehe 12.6)
- Das Minimalpolynom in verschiedene Linearfaktoren zerfällt
- die algebraische Vielfachheit (wie oft Nullstelle des char. Poly.) jedes Eigenwertes gleich der geometrischen Vielfachheit (dim(Kern(A – λE)) ist.

13. Minimalpolynom

13.1 Lemma

Für einen endlichdimensionalen Vektorraum existiert ein annullierendes Polynom.
Beweis: Wegen dim(End(V)) = n^2 sind $n^2 + 1$ Endomorphismen linear abhängig.

13.2 Def. Minimalpolynom

13.3 Lemma

a) α invariante Unterräume von V sind f (α) invariant.
b) Bild (f(α)) und Kern(f(α)) sind α – invariant
c) Seim $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... U_m$ α-invarianter Unterräume dann gilt $Kern(f(\alpha)) = \bigoplus_{i=1}^{m}(U_i \cap Kern(f(\alpha))$
d) Kern f(α) $\subseteq$ Kern g(α) falls f/g
e) Kern f(α) $\cap$ Kern g(α) = Kern (ggT(f,g) (α)

Beweis: a) Linearkombinationen sind invariant b) α f(α) = f(α) α nachrechnen c) Darstellung der Null liefert eine Inklusion, andere klar. d) g = h f und nachrechnen. e) eine Richtung folgt aus d andere über Bézout.

Bemerkung: Ein wichtiger Spezialfall von e) ist: f und g teilerfremd => Kern f(α) $\cap$ Kern g(α) = {0}

13.4 Lemma

Sei V endlichdimensional und p ein Teiler des Minimalpolynoms m mit 1 ≤ grad p < grad m. Setze $U := \frac{m}{p}(\alpha)(V) = Bild\left(\frac{m}{p}(\alpha)\right)$. Dann ist U ein α – invarianter Teilraum von V und p ist das Minpoly.

Beweis: Nach 13.3a) ist U α – invariant. p annulliert U, da pq = m V annulliert. Minipoly folgt daraus, dass $\tilde{p}$ ein Teiler von p sein muss. Andere Richtung durch m/ $\tilde{p}$ q da $\tilde{p}$ q annullierendes Pol. => p / $\tilde{p}$

13.5 Korollar

Sei V endlichdimensional. Sei m = pq mit ggT(p,q) = 1.

a) U = Kern p(α) = Bild q(α) , W = Kern q(α) = Bild p(α)
b) V = U $\oplus$ W
c) Primfaktorzerlegung vom m. Setze $U_i = Kern\ p_i^{e_i}(\alpha)$. Dann ist $V = \oplus U_i$, die U_i sind α-invariant und $p_i^{e_i}$ ist das Minimalpolynom von $\alpha_{/U_i}$

Beweis: Wegen ggT gilt Kern $\cap$ Bild = {0}. Aus Bézout folgt V = U + W. Mit beidseitigen Inklusionen folgt a) und b) . c) per Induktion aus a) b) und 13.4

Bemerkung: Die Untersuchung von Endomorphismen ist also auf die Untersuchung von solchen Endomorphismen zurückgeführt, deren Minamalpolynom die Potenz eines irreduziblen Polynoms ist.

13.6 Def. α zyklisch

13.7 Bemerkung

$< v >_\alpha$ ist der kleinste α invariante Unterraum von V, der v enthält

13.8 Lemma

Ist V α-zyklisch, so gilt dim V = grad m.
Beweis: komisch

13.9 Lemma

Ist m eine Primpotz p^k mit p normiert und irreduzibel, dann existiert ein α-zyklischer Unterraum U ≤ V mit dim U = grad p^k. Insbesondere ist V α – zyklisch, falls grad p^k = dim V.
Beweis: α-zyklischer Unterraum aus einem Vektor v $p^{k-1}(\alpha)(v) \neq 0$. Minimalpolynom hat Form p^k.

13.10 Satz

Es gilt grad m ≤ dim V.
Beweis: Durch vollständige Induktion (Fallunterscheidung V direkte Summe von U und W oder nicht)

13.11 Lemma

Hat m die Form p^k und gilt dim V = grad p^k, dann ist V keine direkte Summe kleinerer α-invarianter Unterräume. Ferner gilt Kern p^i (α) = Bild p^{k-i} (α).
Beweis: lang

13.12 Satz

Sei V endlichdimensional und p^k das Minimalpolynom von α. Zu jedem α – zyklischen Unterraum U mit dim U = grad p^k gibt es ein α- invariantes Komplement W, d.h. V = U $\oplus$ W
Beweis: lang

13.13 Def. α – unzerlegbar (keine direkte Summer zweier α-invarianter Unterräume)

13.14 Satz

Sei m = p^k. Dann ist V genau dann α unzerlegbar, wenn grad p^k = dim V. Sei V α unzerlegbar. Setze U_i = Kern p^i (α). Dann gilt dim U_i = i grad p, und jeder α – invariante Unterraum ist einer der U_i
Beweis: lang

13.15 Lemma (Zusammenfassung)

α unzerlegbare Vektorräume V sind α zyklisch. Das Minimalpolynom eines sochen α ist eine Primpotenz p^k mit grad p^k = dim V

Beweis: Nach 13.5 ist m eine Primpotenz, nach 13.14 gilt dim V = grad m, und nach 13.9 ist V α-zyklisch.

13.16 Lemma

Dann ist V eine direkte Summe α unzerlegbarer Unterraume U_i. Sei m = $\prod p_i^{k_i}$. Setze $V_{p_i} = Kern\ p_i^{k_i}(\alpha)$. Dann gilt $V = \oplus V_{p_i}$ und jeder Unterraum ist eine direkte Summe gewisser U_j.
Beweis: Zerlegung von V in direkte Summe α-unzerlegbarer Unterräume. $V = \oplus V_{p_i}$ folgt aus 13.5. Minimalpolynome von U haben die form p^l mit $l \le k_r$. Rest folgt mit 13.3 c)

Diese Zerlegung ist i.A. nicht eindeutig, allerdings sind die dabei auftretenden Dimensionen (und Minimalpolynome) eindeutig.

13.17 Lemma

Sei α ein Endomorphismus mit $m = p^k$ eine Primpotenz. Sei $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... U_m$ eine Zerlegung in α unzerlegbare Unterräume. Sei p^{ki} das Minimalpolynom von $\alpha/_{U_i}$. Dann gilt dim $U_i = k_i$ grad p. Das Tupel ($k_1, k_2, \dots , k_n$) ist eindeutig bis auf Vertauschung. Ferner gilt $k_i = k$ für mindestens ein i.

Beweis: Wäre $k < k_i$ für alle i, dann wäre p^k nicht mehr das Minpoly. dim $U_i = k_i$ grad p folgt aus α Unzerlegbarkeit. Rest unverständlich

13.18 Lemma

Sei $V = \langle v \rangle_\alpha$ mit Dimension n und $a_0 + a_1X + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ das Minimalpolynom von α. Dann Besitz α bezüglich der Basis v, α(v), $\alpha^2(v), \dots , \alpha^{n-1}(v)$ die Matrixdarstellung.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & ... & ... & -a_1 \\ 0 & 1 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & ... & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Beweis: Für 1, bis n-1 Berechnung der Darstellungsmatrix direkt, für n aus dem Minimalpolynom.

13.19 Def. Frobeniusmatrix (obige Matrix)

Das Minimalpolynom einer Frobeniusmatrix ist $a_0 + a_1X + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

13.20 Lemma

Sei V ein α zyklischer Vektorraum, dann stimmen Minimalpolynom und das char. Polynom überein.

Beweis: Nach 13.18 genügt es das char. Polynom dieser Matrix auszurechen

13.21 Satz (Frobeniusnormalform, rationale Normalform)

Sei dim V < ∞ und α ein Endomorphismus und $m = p_1^{e_1} + p_2^{e_2} + ... + p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung des Minimalpolynoms. Dann lässt sich α durch eine Blockmatrix $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$ beschreiben. Dabei sind die A_j Frobeniusmatrizen zu Polynomen $p_i^{k_i}$ mir $1 \le k_i \le e_i$. Für alle i ($1 \le i \le r$) gehört mindestens ein A_j zu $p_i^{e_i}$. Die Matrizen A_j sind eindeutig bis auf Reihenfolge.

Beweis: Zusammenfassung bisheriger Ergebnisse
Bemerkung: A ist ähnlich zur Frobeniusnormalform

13.22 Satz (Cayley – Hamilton)

Es gilt $\chi_A(A) = 0$. Ferner ist jeder irred. Teiler des Minimalpolynoms.

Beweis: A ist ähnlich zu A' (Frobeniusnormalform). Jeder Teiler des Minimalpolynoms kommt unter den $\chi_{A_j}(X)$ vor => m / χ_A

13.24 Def. Jordanmatrix $J_{n,\lambda}$

13.25 Jordan-Normalform

Sei dim V < ∞ und α ein Endomorphismus und $m = \prod (X - \lambda_i)^{e_i}$.

Dann wird α durch eine Blockdiagonalmatrix $\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$ beschreiben. Hierbei ist jedes J_i eine Jordanmatrix. Die Anordnung ist bis auf Reihenfolge eindeutig. Für jedes i kommt unter den J's die Matrix J_{e_i,λ_i} vor.

Beweis: Erst Frobeniusmatrix, dann zeigen der Ähnlichkeit zur Jordanmatrix.

14. Bilinearform

14.1 Def. Bilinearform φ: V × V → K

14.2 Def. kongruent ($C' = S^T C S$)

14.3 Lemma

Kongruenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation

Beweis: Nachrechnen

14.4 Def. symmetrisch bzw. antisymmetrisch

14.5. Lemma

Symmetrie bzw. Antisymmetrie ist invariant unter Kongruenz.

Beweis: $(S^TCS)^T = S^TC^T(S^T)^T = \pm S^TC^TS$

Bemerkung: Ist $0 \neq 2$, dann ist jede quadratische Matrix die Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix.

14.6 Def. Bilinearform symmetrisch bzw. antisymmetrisch

14.7 Lemma

φ ist genau dann symmetrisch bzw. antisymmetrisch, falls C symmetrisch bzw. antisymmetrisch ist.

14.8 Def. Rang von φ = Rang von C, regulär = nicht ausgeartet

Wohldefiniert, da Rang invariant unter Ähnlichkeit.

Eine Bilinearform heißt regulär (oder nicht ausgeartet), falls rang φ = dim V.

14.9 Lemma

Es sind äquivalent

(i) φ ist regulär ⇔ Darstellungsmatrix invertierbar
(ii) Aus φ(u,w) = 0 für alle u folgt w = 0
(iii) Aus φ(w,u) = 0 für alle u folgt w = 0

Beweis: o.E. rechnen mit Standardskalarprodukt i) => ii) aus Cw=0 folgt w=0 ii) => i) Sei C nicht invertierbar. Dann ex. w $\neq$ 0 mit Cw=0. i) ⇔ iii) fast analog man braucht C invertierbar ⇔ C^T invertierbar

14.10 Lemma

Sei 0 ≠ 2 und φ (v,v) = 0 für alle v. Dann gilt φ = 0.

Beweis: 0 = φ (v+w,v+w) …

14.11 Bemerkung

Es gilt: Ist C eine Diagonalmatrix ⇔ $\varphi(w_i, w_j) = 0$ für alle $i \neq j$.

14.12 Jacobi

Sei 0 ≠ 2 und S eine symmetrische Matrix. Dann existiert eine invertierbare Matrix W und eine Diagonalmatrix D mit $W^TSW=D$.

Beweis: Per Induktion. Ein Vektor ≠ 0. Daraus Basis Rest verändern, bis Bedingung 14.11 erfüllt. Für dieses Teil erfüllt. Induktionsannahme.

14.13 Satz (Trägheitssatz von Sylvester)

Sei $S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, dann existiert eine invertierbare Matrix W mit

$$W^TSW = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&& \\ && \ddots &&&&&&& \\ &&& 1 &&&&&& \\ &&&& -1 &&&&& \\ &&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&& -1 &&& \\ &&&&&&& 0 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\\ddots\\1\end{matrix}}\right\} t \quad \text{Hängt nur von S ab} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}-1\\\ddots\\-1\end{matrix}}\right\} r-t \quad r = \text{rang } S \\ \vphantom{\begin{matrix}0\\\ddots\\0\end{matrix}} \end{array}$$

Beweis: Teilen der Diagonalmatrix aus 14.11 durch die jeweiligen Werte. T von Konstruktion unabhängig durch Widerspruch.

Ist $S \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ so sind alle –1 auch 1.

14.14 Def. positiv definit

Eine positiv definite Bilinearform ist nicht ausgeartet.

14.15 Def. Skalarprodukt oder inneres Produkt / euklidischer Raum / Betrag, Norm, Länge

14.16 Bemerkung

Auf $V = K^n$ und durch $\varphi(v,w) = v^Tw$ ist das Standardskalarprodukt definiert. In diesem Fall stimmt | v | mit der gewöhnlichen Länge überein.

14.17 Def. hermitesche Form / positiv definit / unitärer Raum

Hermitesche Formen sind weder bilinear noch symmetrisch.

14.18 Bemerkung

Weitere Eigenschaften, linear in der zweiten Komponente, Konjugierung bei herausziehen eines Skalars aus 2. Komponente

14.19 Def. hermitesch / Adjungierte Matrix $\overline{C}^T = C^* = C$

14.20 Def. komplex kongruent $B = M^*AM$

14.21 Bemerkung

Komplexe Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation, die verträglich ist mit den hermiteschen Eigenschaften.

14.22 Bemerkung

Hermitesche Form: $\varphi(v,w) = \alpha^T C \beta$ mit $v = \sum \alpha_i v_i$ und $w = \sum \beta_i v_i$

14.23 Bemerkung
C und C' beschreiben gleiche hermitesche Formen auf V bzgl. geeigneter Basen, genau dann wenn sie komplex kongruent sind.

14.24 Def. Lemma Komplexifizierung eines Vektorraums

14.25 Lemma
Sei V ein reeller Vektorraum. Dann ist jede Basis von V eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$, insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V$.

Beweis: Komplexe Linearkombination → Erzeugendensystem. Lineare Unabhängigkeit folgt aus Summendarstellung der Null.

14.29 Satz (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)
In euklidischen oder unitären Vektorräumen gilt: |vw| ≤ |v| · |w|

Beweis: o.E. V unitär (sonst Betrachtung der Komplexifizierung). Folge der positiven Definitheit.

14.30 Korollar

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$

14.31 Satz
Positive Definitheit, Linearität, Dreiecksungleichung

Beweis: Nachrechnen

14.32 Def. normiert

14.33 Def. Winkel / senkrecht oder orthogonal

$$\cos\varphi = \frac{vw}{|v||w|}$$

Existiert wegen Cauchy-Schwarz immer.

14.34 Orthogonalsystem / Orthonormalsystem / Orthogonalbasis / Orthonormalbasis

14.35 Satz
Orthogonalsysteme sind linear unabhängig.

Beweis: Annahme Summe Null, Multiplikation mit v_j => $a_j = 0$

Die Darstellungsmatrix ist genau dann eine Einheitsmatrix, wenn es eine Orthonormalbasis ist.

Aus dem Trägheitssatz von Sylvester folgt, dass jeder endlichdimensionale euklidische Raum eine Orthonormalbasis besitzt. Das entsprechende gilt für unitäre Räume.

14.36 Satz (Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt)
Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum endlicher Dimension. Dann lässt sich jedes Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis fortsetzten. Insbesondere existieren stets Orthonormalbasen.

Beweis: Orthonormalisierungsverfahren. Beweis per vollst. Induktion

14.37 Def. orthogonale Mengen / orthogonale Komplement $M^{\perp}$

14.38 Lemma

a) $N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$ *falls* $M \subseteq N$

b) $M^{\perp} = < M >^{\perp}$

c) $M^{\perp} = N^{\perp} \Leftrightarrow < N >^{\perp} = < M >^{\perp}$

Beweis: a) gilt für jedes $v \in N^{\perp}$ b) eine Inklusion folgt aus a) und $M \subseteq < M >$ außerdem folgt aus $M \perp M^{\perp}$ $< M > \perp M^{\perp}$ c) folgt aus Letzterem

14.39 Satz

Sei V ein eukl. oder unitärer Raum endlicher Dimension. Sei U ein Unterraum von V.

a) $V = U \oplus U^{\perp}$

b) $(U^{\perp})^{\perp} = U$

Beweis: a) Orthonormalbasis von U zu einer von V erweitern. Schnitt Null. b) Folgt aus a) und gleicher Dimension und enthalten.

15. Adjungierte und normale Endomorphismen

15.1 Def. adjungiert

$\alpha(v) w = v \, \alpha^{*}(w)$

15.2 Satz

Zu α gibt es höchstens einen adjungierten Endomorphismus α^*. Für $\dim V < \infty$ existieren stets Adjungierte.

Beweis: Eindeutigkeit + wählen eines Adjungierten

15.3 Satz

Es gilt $\alpha^{**} = \alpha$.

15.4 Satz

Existieren α^* und β^*, so auch $(\alpha\beta)^*$ und es gilt $(\alpha\beta)^* = \beta^* \alpha^*$.

15.5 Satz

Es gilt $Kern\ \alpha^* = (Bild\ \alpha)^{\perp}$. Für $\dim V < \infty$ auch $V = Bild\ \alpha \oplus Kern\ \alpha^*$ $V = Bild\ \alpha^* \oplus Kern\ \alpha$

Beweis: Multiplikation mit v.

15.6 Def. normal

$\alpha \alpha^* = \alpha^* \alpha$

15.7 Lemma

Sei α normal, dann gilt $\alpha(v)\, \alpha(w) = \alpha^*(v)\, \alpha^*(w)$.

Beweis: Nachrechnen

15.8 Satz

Sei α normal. Dann haben α und α^* die gleichen Eigenvektoren. Ist v ein Eigenvektor von α mit Eigenwert λ, dann ist v ein Eigenvektor von α^* mit Eigenwert $\overline{\lambda}$. Eigenvektoren von α zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis: $|\alpha(v) - \lambda v|^2 = \ldots\ |\alpha^*(v) - \overline{\lambda}\, v|^2$; Skalarprodukt null.

Satz 15.9
Es sei $\alpha = \alpha^*$. Dann sind die Eigenwerte von α reell.

Beweis: o.E. V unitär. Nach 15.8 ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von α^* mit Eigenvektor v.

15.10 Lemma
Sei V endlichdimensional, α normal. Sei U ein α-invarianter Unterraum von V. Dann ist $U^{\perp}$ α^* invariant. Ist auch $U^{\perp}$ α invariant, dann ist U α^* invariant und es gilt $\left(a_{/U}\right)^* = \left(a^*\right)_{/U}$. Insbesondere ist $a_{/U}$ normal.

Beweis: uw = 0 => α(u)w=0 => u α^*(w)=0. Rest analog.

15.11 Lemma
Sei V endlichdimensional, α normal und v ein Eigenvektor von α. Dann ist W = $v^{\perp}$ α-invariant und $a_{/w}$ ist normal.

Beweis: Folgt aus 15.10.

15.12 Satz (Spektralsatz, komplex)
Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Raum, und α ein Endomorphismus. Dann ist α genau dann normal, wenn es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von α gibt.

Beweis: <= Herleitung der Darstellung von α^* und dann beweis Normalität. => Vollständige Induktion, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen mit 15.11.

15.13 Lemma
Sei $\hat{\alpha}$ die komplexe Fortsetzung eines Endomorphismus α eines Euklidischen Vektorraums V. Dann gilt $\widehat{a^*} = \hat{\alpha}^*$ und $\hat{\alpha}$ ist normal. Sei v ein Eigenvektor von $\hat{\alpha}$ mit Eigenwert $\lambda \notin \mathbb{R}$, dann ist $\overline{v}$ ein Eigenvektor von $\hat{\alpha}$ mit Eigenwert $\overline{\lambda}$. Insbesondere sind v und $\overline{v}$ orthogonal. Ferner ist $\overline{v}$ normiert, falls v normiert ist.

Beweis: Formulierung von $\hat{\alpha}(v_1 + iv_2) = \alpha(v_1) + i\alpha(v_2)$. Dann alles nachrechnen.

15.14 Satz (Spektralsatz, reell)
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Raum und α ein normaler Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis, bzgl. der α durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_m & & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & -b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_r & b_r \\ & & & & & & -b_r & a_r \end{pmatrix}$$
beschrieben wird.

Beweis: Mittels Vollständiger Induktion über dim V α reelle und nicht reelle Eigenwerte getrennt.

15.15 Korollar
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Raum und α selbstadjungiert d.h. $\alpha = \alpha^*$. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von α.

Beweis: Folgt aus 15.14 mit $C = C^T$

16. Orthogonale und unitäre Endomorphismen

16.1 Def orthogonal bzw. unitär

$\alpha(v)\alpha(w) = vw$

16.2 Lemma

Orthogonale und unitäre Endomorphismen sind injektiv. Für dim V < ∞ gilt:
O(V) und U (V) sind Untergruppen von Gl(V)

Beweis: Kern α = {0}, prüfen der Eigenschaften

16.3 Lemma

Sei V euklidisch und α orthogonal, dann ist die Komplexifizierung $\hat{\alpha}$ unitär.

Beweis: Nachrechnen zusammen mit 16.4. iii

16.4 Satz

Sei V eukl. oder unitär und α ein Endomorphismus. Dann sind äquivalent:

(i) α ist orthogonal bzw. unitär
(ii) Aus |v| = 1 folgt |α(v)|=1
(iii) |α(v)| = |v|
(iv) Bilder unter α von Orthonormalsystemen sidn Orthonormalsystemen

Beweis: i)=>ii) und iii) klar iii)=>i) Auflösen und Realteil abschätzen i)=>iv) klar iv)=>ii) klar

16.5 Lemma

Sei V euklidisch oder unitär mit dim V < ∞. Dann gilt $\alpha^*\alpha$ = 1 genau dann wen α orthogonal bzw. unitär ist.

Beweis: Auf Def. α* anwenden.

16.6 Def. orthogonal (Matrix)

$A^{\perp}A = E \quad bzw. \quad A^*A = E$

Bemerkung: A ist genau dann orthogonal bzw. unitär, wenn die spalten von A ein Orthonormalsystem bzgl. des Sandardskalarprodukts sind.

16.7 Lemma

Sei V euklid. oder unitär endlicher Dimension. A die darstellende Matrix von α bzgl. einer Orthonormalbasis. Dann ist α genau dann orthogonal bzw. unitär, wenn A orthogonal bzw unitär ist.

Beweis: φ als Koordinatenabbildung einführen. $<v, w> = \varphi(v)^t \cdot \overline{\varphi(w)}$ und $\varphi(\alpha(v)) = A\varphi(v)$.
Dann Äquivalentsumformungen von $\alpha(v)\alpha(w) = vw$

16.8 Satz

Sei α orthogonal. Dann wird α bzgl. einer geeigneten Basis durch diese Matrix beschrieben.

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&& \\ &&&&& -1 &&&& \\ &&&&&& \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 && \\ &&&&&& \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& \cos\varphi_n & \sin\varphi_1 \\ &&&&&&&&& \sin\varphi_1 & \cos\varphi_n \end{pmatrix}$$

Beweis: Da α orthogonal ist, ist α normal. Matrix aus Satzt 15.14 Außerdem AA^T=1 also $\lambda_i^2 = 1$ und $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Wähle Kosinus Rest Geometrische Formeln.

16.9 Satz
Sei V euklidisch oder unitär und α orthogonal bzw. unitär. Dann hat jeder Eigenwert den Betrag 1.

Beweis: $|\lambda|^2 |v|^2 = \lambda\bar{\lambda} vv = \lambda v \lambda v = \alpha(v)\alpha(v) = vv = |v|^2$

16.10 Def. orthogonal ähnlich bzw. unitär ähnlich
Dann auch ähnlich, da $A^*=A^{-1}$

16.11 Satz (Hauptachsentransformation, reell)
Jede reelle symmetrische Matrix ist orthogonal diagonalisierbar (d.h. orth. ähnlich zu einer Diagonalmatrix).

Beweis: α selbstadjungiert, da A symmetrische Matrix. Nach 15.15 Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Setze T gleich diesen Vektoren. Dann ist T orthogonal und diagonalisiert A.

16.12 Satz (Hauptachsentransformation, komplex)
Jede komplexe selbstadjungierte (=hermitesche) Matrix ist unitär ähnlich zu einer reellen Diagonalmatrix.

Beweis: Analog zum Reellen, mit der Tatsache, dass selbstadjungierte Operatoren nur reelle Eigenwerte haben.

16.13 Def. positiv Definit
$v^T S \bar{v} > 0$

16.14 Satz
Eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Beweis: S ist orthogonal oder unitär diagonalisierbar. $0 < v^T S \bar{v} = v^T T D \bar{T}^T \bar{v} = (T^T v)^T D \overline{(T^T v)}$.
Aussage muss nur für D bewiesen werden. Relativ Klar.

16.15 Satz (Polarzerlegung)
Jede Matrix A hat eine eindeutige Darstellung A = B C mit C orthogonal bzw. unitär und B symmetrisch bzw. hermitesch und B positiv definit.

Beweis: AA^* ist hermitesch und positiv definit. => unitär ähnlich zu Diagonalmatrix mit nach 16.14 nur positiven Einträgen. Geeignete Kompositionen von A, D und T erfüllen die Eigenschaften. Eindeutigkeit komplizierter.

17. Faktorräume

17.1 Def. Faktorraum
Auf V erhält man eine Äquivalenzrelation $v \sim w \Leftrightarrow v - w \in U$. [v] bezeichnet die Äquivalenzklasse von v. Also $[v] = v + U = \{v + u \mid u \in U\}$.
Die Menge der Äquivalenzklassen [v] heißt Faktorraum oder Quotientenraum von V nach U. $V_{/U}$
Da (V,+) abelsch ist, ist (U,+) ein Normalteiler.

17.2 Lemma
Durch $[v] + [w] = [v + w]$ und $\lambda [v] = [\lambda v]$ wird $V_{/U}$ zu einem K–Vektorraum.

Beweis: Wohldefiniertheit. Rest ergibt sich direkt aus V. Nullelement ist [0] = U.

17.3 Satz

$\varphi : V \to V/U$, $v \mapsto [v]$ ist ein Epimorphismaus von Vektorräumen mit Kern U. Falls dim V < ∞, dann gilt: dim $V_{/U}$ = dim V – dim U

Beweis: Offenbar surjektiv, Kern klar, Homomorphismus klar.

17.4 Lemma

U ein α – invarianter Unterraum. Dann wird durch $\overline{\alpha}([v]) := [\alpha(v)]$ ein Endomorphismus definiert.

Beweis: zuerst Wohldefiniertheit. Dann Homorphismuseigenschaften.

Ist K algebraisch abgeschlossen und V eine endlichdimensionaler K–Vektorraum, dann lässt sich jeder Endomorphismus von V durch eine obere Dreiecksmatrix beschreiben. Dies lässt sich auch wesentlich einfacher beweisen.

17.5 Satz

Sei dim V < ∞ und K algebraisch abgeschlossen. Dann lässt sich jeder Endomorphismus durch eine obere Dreiecksmatrix beschreiben.

Beweis: Induktion über n = dim V. z.Z. V Besitzt eine Basis mit $\alpha(v_i) \in < v_1, v_2, ..., v_i >$. Klar für n = 1. Da K algebraisch abgeschlossen hat es einen Eigenvektor. Setzte U = $<v_1>$. Anwendung der Induktionsannahme auf $V_{/U}$