Approximationen der Binomialverteilung

Beispiele und Anwendungen

Würfelexperiment und Bedeutung der Korrekturterme $\pm 1/2$

Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit bei 600 Würfen mit einem Laplacewürfel mindesten 90 und höchstens 100 Sechsen zu erhalten?

Es ist $n = 600$ und $p = 1/6$, also $np = 100$ und $\sigma_n = \sqrt{600 \cdot (1/6) \cdot (5/6)} \approx 9,13$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
P(90 \leq S_n \leq 100) \quad &= \quad P\left(\frac{90-100}{\sigma_n} \leq S_n^* \leq \frac{100-100}{\sigma_n}\right) \\
&\overset{deMoivre}{\approx} \quad \Phi(0) - \Phi(-10/9,13) \\
&= \quad 0,5 - \Phi(-1,095) \\
&= \quad 0,5 - (1 - \Phi(1,095)) \\
&\approx \quad 0,36 \ ,
\end{aligned}$$

wobei der Wert $\Phi(-1,095) \approx 0,8632$ einer Tafel entnommen wurde.

Wir haben für $\alpha = 90$ und $\beta = 100$ die Wahrscheinlichkeit $P(\alpha \leq S_n \leq \beta)$ durch $\Phi(x(n,\beta)) - \Phi(x(n,\alpha))$ approximiert. Gemäß der Bemerkung zum Satz von de Moivre Laplace liefert die Approximation durch $\Phi(x(n,\beta+1/2)) - \Phi(x(n,\alpha-1/2))$ ein genaueres Ergebnis. Mit dieser ist

$$\begin{aligned}
P(90 \leq S_n \leq 100) \quad &\overset{deMoivre}{\approx} \quad \Phi(0,5) - \Phi(-10,5/9,13) \\
&= \quad \Phi(0,055) - \Phi(-1,15) \\
&= \quad \Phi(0,055) - (1 - \Phi(1,15)) \\
&\approx \quad 0,397 \ .
\end{aligned}$$

Der exakte Wert der Wahrscheinlichkeit ist 0,4025.

Wahlvorhersage, Bestimmung eines Stichprobenumfangs

Wir wollen den Prozentsatz der Wähler einer Partei A schätzen. Werden n Wähler befragt und sind darunter S_n Wähler der Partei A, so sei S_n/n der Schätzer für die Wahrscheinlichkeit p, dass ein zufällig ausgewählter Wähler für die Partei A stimmt. Wie groß muss n sein, damit die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums von mehr als 1% kleiner ist als 0,05?

Es soll also gelten $P(-0,01 \leq S_n/n - p \leq 0,01) \geq 0,95$.

$$0,95 \leq P\left(-\frac{0,01\ n}{\sigma_n} \leq S_n^* \leq \frac{0,01\ n}{\sigma_n}\right) \approx \Phi\left(\frac{0,01\ n}{\sigma_n}\right) - \Phi\left(-\frac{0,01\ n}{\sigma_n}\right) = 2\ \Phi\left(\frac{0,01\ n}{\sigma_n}\right) - 1$$

$\Rightarrow$

$$\Phi\left(\frac{0,01\ n}{\sigma_n}\right) \geq 0,975$$

Zusammen mit $\Phi^{-1}(0.975) = 1,96$ muss also gelten

$$\frac{0,01\ n}{\sigma_n} = 0,01\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \geq 1,96$$

d.h.

$$n \geq p \cdot q \cdot 10000 \cdot 1,96^2$$

Der Maximalwert von $pq = p(1-q)$ ist 1/4. Es genügen also

$$n = 2500 \cdot 1,96^2 \approx 9600$$

Befragungen.

Beispiele zur Verwendung der Poissonverteilung als Approximation der Binomialverteilung

1. In einem Hörsaal seinen n = 8 Personen. Die Wahrscheinlichkeit p, heute Geburtstag zu haben ist $p = 1/365$. Die Zahl X derer, die heute Geburtstag haben, ist praktisch $P(\lambda)$-verteilt mit $\lambda = np = 8/365 \approx 0,022$.

$$P(X = 0) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = 0,978$$

2. In einem Land gibt es ca. 30 Selbstmorde pro 100 000 Einwohner pro Jahr. In einer typischen Stadt mit 120 000 Einwohner wäre dann damit zu rechnen, dass die Zahl der Selbstmorde im kommenden Jahr $P(\lambda)$-verteilt ist mit $\lambda = np = 36$.