

Stochastik Vordiplomsprotokoll

Datum: 12.09.2007

Prüfer: Prof. Dr. Michael Falk

Beisitzer(in): Diana Stöhr

Note: 1.3

Die Prüfungsatmosphäre bei Herrn Falk ist sehr angenehm. Die Prüfung begann bei mir auch Pünktlich um 16.00 Uhr. Zu diesem Zeitpunkt waren wohl auch schon sämtliche Plätzchen- und Kaffeereste aufgebraucht, die man sonst von Ihm angeboten bekommt. Die eigentliche Prüfung begann dann damit, dass wir ein kurzes Pläuschen darüber hielten, wie viele der heutigen Prüfungsprotokolle ich denn schon gelesen hätte. Er entschloss sich deshalb ein Thema abzufragen, das er heute noch nicht abgehandelt hatte. Ich wurde also fast ausschließlich über Stochastik I ausgefragt.

Nennen sie mir einmal die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ wobei man die Zusatzvoraussetzung $P(B) > 0$ benötigt.

Den Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit hatte ich heute glaube ich auch noch nicht gefragt. Können sie mir diesen nennen?

Sage ihn kurz auf

Schreiben sie ihn doch besser hin.

$P(A) = \sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i)$, wobei die Vereinigung der B_i ganz Omega ergeben muss.

Haben sie nicht eine Voraussetzung an die B_i vergessen.

Ja, die müssen auch disjunkt sein.

Gilt das für endliche I oder auch unendliche.

Gilt auch für abzählbare, das ergibt sich aus dem Beweis.

Dann führen sie den doch mal vor.

Schreibe kurz den Beweis hin, erwähne dabei, dass die Sigmaadditivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes auch der Grund ist, dass es für abzählbare gilt.

Mit der bedingten Wahrscheinlichkeit kann man ja dann die Unabhängigkeit definieren.

Ja, über $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, wobei man aber $P(B) > 0$ voraussetzen muss. Dies ist auch der Grund, warum man es dann zur eigentlichen Definition von Unabhängigkeit umformt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Wo braucht man den z.B. die Unabhängigkeit?

Z.B. bei $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Gilt denn immer – schreibt aufs Blatt: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \Leftrightarrow X$ und Y unabhängig
Das kann ich jetzt nicht beurteilen.

Das ist einer der Momente wo es nur die Antworten „Ja“ und „Nein“ gibt.

Ich denke nicht dass es stimmt, könnte Ihnen aber nicht sagen warum.

Hier stand ich ziemlich auf dem Schlauch.

Wenn sie die erste Bedingung erfüllen, dann hat das sogar einen speziellen Namen.
Dann sind sie unkorreliert. Dann stimmt es nicht. Denn wir hatten mal in der Übung, zwei normalverteilte und unkorrelierte Zufallsvariablen, die nicht unabhängig waren.

Das ist ein gutes Beispiel, was muss man denn noch dazu fordern, damit oben die Äquivalenz gilt.

Dass sie bivariat Normalverteilt sind.

Jetzt müssen Sie mir aber den Unterschied erklären.

Im ersten Fall sind X und Y unabhängig $N(0,1)$ verteilt. Im zweiten Fall lässt sich der Vektor $(X, Y)^T$ als $AZ + c$ darstellen, mit Z 2-dimensional Normalverteilt.

Wie sieht denn die Dichte eines solchen Vektors dann aus.

So ähnlich wie die der Normalverteilung nur mit Matrizen, also auch mit $\dots \exp(\dots)$.

Was steht denn da genau oben im Exponenten.

Also das weiß ich jetzt nicht so genau. Aber es müsste eine quadratische Form sein. Mit einer Diagonalmatrix mit lauter gleichen Elementen in der Mitte.

Das ist nur im Spezialfall von Unabhängigkeit der Fall.

Sonst steht dort eine positiv definite Matrix.

Im eindimensionalen steht das Sigma ja im Nenner.

Oh ja, es ist die Inverse der Kovarianzmatrix.

Beschäftigen wir uns mit dem arithmetischen Mittel. Welche Abschätzungen kennen sie denn diesbezüglich?

Das schwache Gesetz der großen Zahlen, dass es also in Wahrscheinlichkeit gegen den Erwartungswert konvergiert.

Das lässt sich mit welcher Ungleichung beweisen?

Kolmogoroff

Nein, die braucht man für das starke Gesetz.

Mir fiel der Name erst nicht ein, Herr Falk ließ mir aber Zeit

Tschebyscheff-Ungleichung, die wiederum aus der Markoffschen Ungleichung resultiert.

Was ist jetzt der Unterschied zum starken Gesetz?

Das besagt, dass es P-f.s. konvergiert.

Könnte es auch P-f.s. gegen den Median konvergieren?

Ja sicher, wenn der Median gleich dem Erwartungswert ist, wie z.B. bei symmetrischen Dichten.

Und was wenn der Median nicht gleich dem Erwartungswert ist?

Dann geht es nicht, denn wir hatten gezeigt, dass wenn es gegen einen Wert c konvergiert, dass es dann der Erwartungswert sein muss.

Dann haben wir eine Zeitlang aneinander vorbeigeredet, er wollte schlussendlich auf den zentralen Grenzwertsatz hinaus.

Und was ist mit $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f_i - \mu$ gegen was konvergiert das?

Ich habe erstmal ein „durch Sigma“ ergänzt und dann den zentralen Grenzwertsatz zitiert.

Betrachten wir nun: $\sup \left| P \left(\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{f_i - \mu}{\sigma} \leq t \right\} \right) - \Phi(t) \right|$

Das konvergiert dann auch gegen Null, so ähnlich wie bei Glivenko-Cantelli.

Ja, man sagt, dass es so ähnlich ist wie Glivenko-Cantelli.

Und gegen was konvergiert es nun, wenn man das Sigma weglässt?

Gegen die Normalverteilung mit Sigma, also $N(0, \sigma^2)$.

Und was ist dann mit $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f_i$?

Das dann gegen $N(\mu, \sigma)$. Nein, gegen $N(\frac{\mu}{\sqrt{n}}, \sigma^2)$.

Das würde ja dann für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergieren. Wie es genau konvergiert, darüber müssen wir uns auch noch unterhalten.

Dann wohl $N(\mu \cdot \sqrt{n}, \sigma^2)$. Die Konvergenz ist in Verteilung, dass also die Verteilungsfunktionen für n gegen ∞ in allen Stetigkeitsstellen übereinstimmen.

Wo würde es dann bei der Normalverteilung nicht stimmen.

Nirgends.

Also nicht nirgends, also überall?

Ja, die ist ja auch überall stetig.

Da die Normalverteilung ja so besonders ist gibt es ja auch einige davon abgeleitete Verteilungen.

Die Chi-Quadrat-, die F- und die T-Verteilung.

Was ist denn die Chi-Quadrat-Verteilung?

Die Summe der Quadrate $N(0,1)$ Verteilter.

Kennen Sie das Faltungstheorem der Chi-Quadrat-Verteilung.

Ja, es besagt, dass wenn X Chi-Quadrat-verteilt ist mit m Freiheitsgraden und Y mit n Freiheitsgraden, dass die Summe auch Chi-Quadrat-verteilt ist mit $m+n$ Freiheitsgraden.

Haben sie nicht noch etwas vergessen?

Sie müssen unabhängig Chi-Quadrat-verteilt sein.

Welche Faltungstheoreme kennen sie denn noch?

Das Faltungstheorem der Normalverteilung.

Gibt es auch ein Faltungstheorem für die Binomialverteilung?

Nicht das ich wüsste.

Wie stellt man sich denn ein Experiment für die Binomialverteilung vor?

Das ist das ziehen mit Zurücklegen und man überprüft die Anzahl der Treffer.

Und wie heißt das wenn man nur einmal zieht?

Geometrisch verteilt?

Nein, das ist nach einer bekannten Stochastikerfamilie benannt.

Keine Ahnung, ist halt $B(1,p)$ verteilt.

Die Bernoulli-Verteilung. Und wenn sie jetzt viele nacheinander durchführen.

Dann ist es Binomialverteilt $B(n,p)$. Daraus könnte man jetzt natürlich ein Faltungstheorem folgern. Dass also $B(n,p)$ und $B(m,p)$ dann $B(n+m,p)$ verteilt ist. Gibt es denn auch ein Faltungstheorem wenn die p nicht gleich sind?

überlegt kurz – **Nein, wenn die p nicht gleich sind, dann gibt es das nicht.**

Für die Poisson-Verteilung gibt es auch noch ein Faltungstheorem.

Wie lautet denn die Poisson-Verteilung?

Ich hab zwar etwas auf Blatt geschrieben was so ähnlich aussah wie eine Poisson-Verteilung, Herr Falk hat sie mir dann aber korrekt daneben geschrieben.

Was hat denn die Poisson-Verteilung mit der Binomialverteilung zu tun?

Die Poisson-Verteilung konvergiert wenn $\frac{\lambda}{n} = p$ ist gegen die Binomialverteilung.

Die Binomialverteilung konvergiert vielmehr für $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ gegen die Poisson-Verteilung. Deshalb wird sie auch Verteilung seltener Ereignisse genannt.

Die p_n müssen ja gegen Null konvergieren, wenn n gegen Unendlich konvergiert.

Sie sehen also, dass man annehmen könnte, dass die Faltungstheoreme der Normalverteilung und der Poissonverteilung sich aus dem Faltungstheorem der Binomialverteilung und der Konvergenz derselben gegen die Normalverteilung und der Poissonverteilung ergeben.

Ja, könnte man annehmen.

Das ist also eine Art Vererbungslehre der Faltungstheoreme.

Zu dem Zeitpunkt konnte ich ihm dann kaum noch folgen, die eigentliche Prüfungszeit war hier wohl auch schon rum.

Jetzt habe ich sie ja noch kaum etwas über das zweite Semester gefragt. Wo haben wir denn die Binomialverteilung, oder eine Abgeleitete dort verwendet?

Z.B. die Multinomialverteilung bei den Chi-Quadrat-Tests. Also wenn man auf Homogenität Prüfen wollte.

Das meinte ich jetzt nicht.

Auch bei den hängenden Rootogrammen, denn die zu Grunde liegenden Histogramme sind

auch multinomialverteilt. *Denn habe ich noch kurz die Varianzstabilisierung und Beurteilung ob Daten Normalverteilt sind mit Hilfe von Rootogrammen erklärt.*

Ich meinte eigentlich Fischers-Exakten-Test.

Aber der verwendet die hypergeometrische Verteilung.

Was ist da der Unterschied zur Binomialverteilung?

Das ist wie Ziehen ohne Zurücklegen.

In diesem Augenblick unterbricht uns Diana Stöhr mit dem Kommentar, dass die Zeit ja auch schon lange vorbei sei.

ENDE

Meine Prüfung dauerte fast 45 Minuten an die sich noch eine kurze Unterhaltung über meine weitere Ferienplanung anschloss. Als Begründung warum es nicht für eine 1.0 gereicht hätte nannte Herr Falk mir, dass ich am Anfang, als wir über das Produkt von Erwartungswerten sprachen, zu lange gebraucht hätte um auf die Unkorreliertheit zu kommen.

Ich habe in diesem Protokoll versucht die Prüfung wortwörtlich wiederzugeben.